Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

Черный Александр Семенович

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО СТОХАСТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ И СИНГУЛЯРНЫМ СТОХАСТИЧЕСКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

**01.01.05 — теория вероятностей
и математическая статистика**

**Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Москва, 2005

Содержание

Введение

Исторический обзор

В настоящей диссертации предлагается единый подход для изучения существования, единственности и качественного поведения решений сингулярных стохастических дифференциальных уравнений. Исследование проводится методами стохастического анализа, такими как теория мартингалов, техника локальных времен, методы замены времени и преобразования фазового пространства и т.д.

Прежде всего дадим краткий исторический обзор. Теория стохастических дифференциальных уравнений (ниже будем использовать сокращение *СДУ*) — одна из наиболее важных ветвей стохастического анализа. Она имеет тесные связи как с другими областями математики (уравнениями в частных производных, теорией потенциала, теорией марковских процессов), так и с приложениями (например, с теорией оптимальной остановки и с финансовой математикой).

Основы теории диффузионных процессов были заложены А.Н. Колмогоровым [21], [58] (уравнение Колмогорова–Чепмена, прямые и обратные уравнения в частных производных). Эта теория была далее развита в работах У. Феллера [49], [50].

К. Ито предложил потраекторную конструкцию диффузионных процессов. С этой целью он ввел понятие стохастического интеграла [52] и понятие стохастического дифференциального уравнения [53], [54]. В то же самое время и независимо от Ито, СДУ были рассмотрены И.И. Гихманом [10]–[12]. (Некоторые более ранние исследования в этом направлении можно найти в работах П. Ланжевена [60] и С.Н. Бернштейна [1], [39].) С появлением этих работ теория СДУ стала активно развиваться.

И.В. Гирсанов [8] предложил метод замены меры, который впоследствии стал стандартным методом доказательства существования и единственности так называемых слабых решений (сам этот термин появился позже). Теорема Гирсанова широко применяется не только в чистом стохастическом анализе, но и в его приложениях (применение этой теоремы в финансовой математике описано в монографии А.Н. Ширяева [33; Гл. VII, §3b]). Дальнейшие достаточные условия существования и единственности решений были получены А.К. Звонкиным [18], Н.В. Крыловым [22], [23], Н.И. Портенко [27], [28], А.В. Скороходом [29], Д. Струком и С. Вараданом [67] и другими исследователями. Полученные условия были существенно слабее условий, налагаемых в работе К. Ито [54]. Причина заключается в следующем. В работе Ито решение строится на заданном фильтрованном вероятностном пространстве с заданным броуновским движением, в то время как в более поздних работах решение строится на некотором фильтрованном вероятностном пространстве с некоторым броуновским движением. Это расхождение показало необходимость введения двух типов решений: сильных и слабых; см. работу И.В. Гирсанова [8], монографию Р.Ш. Липцера и А.Н. Ширяева [24], работы Т. Ямада и С. Ватанабэ [70], А.К. Звонкина и Н.В. Крылова [19]. Далее, Д. Струк и С. Варадан [67], [68] ввели понятие мартингальной проблемы, тесно связанное с понятием СДУ (подробно мартингальные проблемы и их применения рассмотрены также в монографиях [48], [55]). Дж. Хант [51] и В.А. Волконский [6], [7] предложили метод замены времени и преобразования фазового пространства для построения регулярных непрерывных строго марковских процессов (он описан в монографиях [16; Гл. 17], [64; Ch. V.1]). Этот метод также может быть применен для построения решений одномерных однородных СДУ. Используя этот метод, Х.-Ю. Энгельберт и В. Шмидт [44]–[47] получили очень слабое достаточное условие существования и единственности решений одномерных однородных СДУ.

Теория СДУ и ее применения описаны в ряде монографий. Отметим книги [3; Гл. VIII], [4], [5; Гл. 12], [13], [14], [15], [16], [24; Гл. IV], [26], [56; Ch. 18], [57; Ch. 5], [63; Ch. IX], [64; Ch. V], [68].

Стохастические дифференциальные уравнения: определения, утверждения, примеры

Прежде всего мы приводим в параграфе 1.1 определения некоторых базовых понятий теории СДУ: сильных и слабых решений, сильной и слабой единственности, мартингальных проблем и решений до случайного момента времени (также называемых локальными решениями). Изложение ведется для наиболее общих СДУ, а именно, многомерных уравнений с коэффициентами, зависящими от прошлого. Это уравнения вида

$$dX_t^i = b_t^i(X)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_t^{ij}(X)dB_t^j, \quad X_0 = x_0 \quad (i = 1, \dots, n), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, а

$$b : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n,$$
$$\sigma : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times m}$$

являются предсказуемыми функционалами. (Определение предсказуемости можно найти, например, в [17; Гл. I, §2 a] или [63; Ch. IV, § 5].)

Далее, мы напоминаем в параграфе 1.2 некоторые общие факты, касающиеся связи различных типов существования и единственности. Наиболее известный и часто применяемый результат в этом направлении — теорема Ямада–Ватанабэ.

Предложение (Ямада, Ватанабэ). *Предположим, что для СДУ* (1) *имеет место сильная единственность. Тогда*

(i) *Имеет место слабая единственность.*

(ii) *Существует измеримое отображение*

$$\Phi : \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m), \mathcal{B}\big) \longrightarrow \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \mathcal{B}\big)$$

такое, что процесс $\Phi(B)$ *согласован с пополненной натуральной фильтрацией* $\big(\overline{\mathcal{F}}_t^B\big)$ *процесса* B *и для любого решения* (X, B) *имеем* $X = \Phi(B)$ P*-п.н.*

Из этой теоремы вытекает, что из слабого существования и сильной единственности следуют сильное существование и слабая единственность.

В настоящей работе (см. параграф 1.2) доказывается "двойственное" утверждение:

Теорема 1.16а. *Предположим, что для СДУ* (1) *имеют место слабая единственность и сильное существование. Тогда имеет место сильная единственность.*

Следует отметить, что эта теорема была доказана Х.-Ю. Энгельбертом [42] при некотором дополнительном ограничении. Здесь же она доказывается без всяких дополнительных ограничений.

Доказательство теоремы 1.16а опирается на следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 1.16б. *Предположим, что для СДУ* (1) *имеет место слабая единственность. Тогда для любых решений* (X, B) *и* $(\widetilde{X}, \widetilde{B})$ *(они* *могут быть заданы на разных вероятностных пространствах) выполнено* $\mathrm{Law}(X_t, B_t;\, t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(\widetilde{X}_t, \widetilde{B}_t;\, t \geqslant 0)$.

Рис. 1 иллюстрирует теорему Ямада-Ватанабэ и теорему 1.16a.

В параграфе 1.3 содержится сводка основных результатов, касающихся существования и единственности решений СДУ. Это теоремы Ито, Звонкина, Энгельберта–Шмидта, Ямада–Ватанабэ, Скорохода, Струка–Варадана, Портенко, Крылова. Для одномерных однородных СДУ (они представляют первостепенный интерес для данной работы) одним из наиболее мощных методов исследования существования, единственности и качественного поведения решений является метод замены времени и преобразования фазового пространства. Мы описываем суть этого метода, опуская технические сложности.

Параграф 1.4 содержит ряд важных примеров СДУ. Некоторые из них широко известны (примеры Танака, Гирсанова, Цирельсона, Барлоу), некоторые являются новыми. В частности, мы проводим полное исследование существования и единственности решений уравнения, которому подчиняется процесс Бесселя. Для этого уравнения доказывается следующее утверждение.

Пример 1.35. *Рассмотрим СДУ*

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2X_t} I(X_t \neq 0)dt + dB_t, \quad X_0 = x_0$$

с $\delta > 1$ *(как известно, этому уравнению подчиняется процесс Бесселя размерности* δ*).*

(i) *Если* $\delta \geqslant 2$ *и* $x_0 \neq 0$, *то для этого уравнения имеют место сильное и слабое существование, а также сильная и слабая единственность.*

(ii) *Если* $1 < \delta < 2$ *или* $x_0 = 0$, *то для этого уравнения имеют место сильное и слабое существование, но нет ни сильной, ни слабой единственности.*

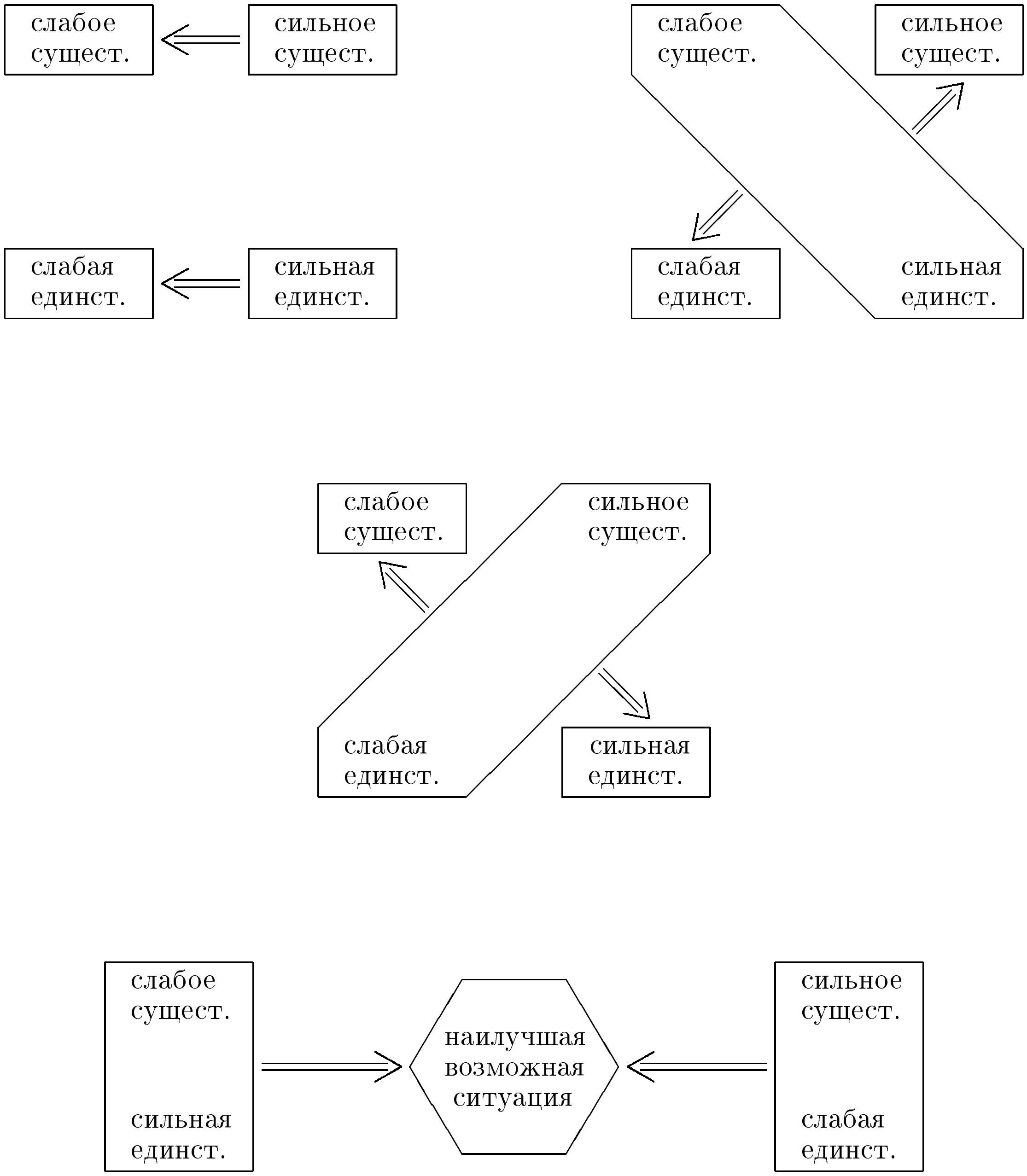


Рис. 1. Связь между различными типами существования и единственности. Верхние диаграммы показывают очевидные импликации и импликации, вытекающие из теоремы Ямада–Ватанабэ. Средняя диаграмма показывает одну очевидную импликацию и импликацию, вытекающую из теоремы 1.16a. Нижняя диаграмма иллюстрирует теорему Ямада–Ватанабэ и теорему 1.16a в терминах "наилучшей возможной ситуации" (см. § 1.2).

Интересным применением результатов параграфов 1.2 и 1.4 (в частности, теоремы 1.16а) служит следующее. Для произвольного СДУ каждое из свойств:

- слабое существование,
- сильное существование,
- слабая единственность,
- сильная единственность

может выполняться или не выполняться. Итак, имеется $16\ (= 2^4)$ мыслимых комбинаций. Некоторые из них невозможны (к примеру, если есть сильная единственность, то, по теореме Ямада–Ватанабэ, должна быть и слабая единственность). Для каждой из этих комбинаций теорема Ямада-Ватанабэ, теорема 1.16а и примеры параграфа 1.4 позволяют либо дать пример соответствующего СДУ, либо доказать, что эта комбинация не реализуется. Оказывается, что реализуется лишь 5 комбинаций (см. табл. 1).

Изолированные особые точки и односторонняя классификация

Для одномерных однородных СДУ, т.е. уравнений вида

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0, \tag{2}$$

одно из наиболее слабых достаточных условий существования и единственности слабого решения было получено Х.-Ю. Энгельбертом и В. Шмидтом [44]–[47]. (В случае, когда $b = 0$, имеются даже необходимые и достаточные условия; см. работу [44], а также работу С. Ассинга и Т. Сенфа [37].) Энгельберт и Шмидт доказали, что если $\sigma(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \tag{3}$$

Слабое сущест.	**Сильное сущест.**	**Слабая единст.**	**Сильная единст.**	**Возможно/Невозможно**
–	–	–	–	невозможно, очевидно
–	–	–	+	невозможно, очевидно
–	–	+	–	невозможно, очевидно
–	–	+	+	возможно, примеры 1.28, 1.29
–	+	–	–	невозможно, очевидно
–	+	–	+	невозможно, очевидно
–	+	+	–	невозможно, очевидно
–	+	+	+	невозможно, очевидно
+	–	–	–	возможно, пример 1.37
+	–	–	+	невозможно, т. Ямада-Ватанабэ
+	–	+	–	возможно, примеры 1.30–1.32
+	–	+	+	невозможно, т. Ямада-Ватанабэ
+	+	–	–	возможно, примеры 1.33–1.35
+	+	–	+	невозможно, т. Ямада-Ватанабэ
+	+	+	–	невозможно, теорема 1.16а
+	+	+	+	возможно, очевидно

Табл. 1. Возможные и невозможные комбинации различных типов существования и единственности. К примеру, комбинация ” + – +– ” в строке 11 соответствует СДУ, для которого существует решение, нет сильного решения, есть слабая единственность и нет сильной единственности. Таблица показывает, что такие уравнения даются примерами 1.30–1.32.

(запись $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ означает, что функция f локально интегрируема на $\mathbb{R}$, т.е. $\int_K |f(z)|dz < \infty$ для любого компакта K), то существует единственное слабое решение уравнения (2). (Более точно, существует единственное слабое решение, определенное до момента взрыва.)

Условие (3) является достаточно слабым. Тем не менее, и в теории, и в приложениях часто возникают уравнения, для которых оно не выполнено. Таковы, к примеру, СДУ для геометрического броуновского движения

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x_0$$

(модель Блэка–Шоулса!) и СДУ для процесса Бесселя размерности δ ($\delta > 1$)

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2X_t} I(X_t \neq 0)dt + dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

В приложениях уравнения, не удовлетворяющие условию (3), возникают обычно следующим образом. Пусть некоторый процесс моделируется как решение уравнения (2). Предположим, что этот процесс положителен по природе (например, это цена акции или численность популяции). Тогда СДУ, моделирующее этот процесс, *не* должно удовлетворять условию (3). Причина заключается в следующем. Если условие (3) выполнено, то для любого $a \in \mathbb{R}$ решение достигнет уровня a с положительной вероятностью. (Это вытекает из конструкции решения; см. параграф 1.3.)

Исследование СДУ вида (2), не удовлетворяющих условию (3), составляет основную задачу настоящей диссертации. Для таких уравнений мы вводим термин *сингулярные стохастические дифференциальные уравнения.* Частные случаи таких уравнений исследовались в различных работах (например, СДУ для геометрического броуновского движения или СДУ для процессов Бесселя). Однако методы исследований опирались на специфику того или иного уравнения (например, на свойство линейности коэффициентов), и отсутствовал единый метод их исследования.

В настоящей диссертации предлагается единый подход для исследования (слабых) решений сингулярных стохастических дифференциальных уравнений. Мы изучаем в первую очередь следующие проблемы:

- *Существует ли решение уравнения* (2)*?*
- *Единственно ли оно?*
- *Каково качественное поведение решения?*

Подчеркнем, что под существованием и единственностью мы здесь понимаем слабое существование и слабую единственность. Отметим, что *слабым решением* уравнения (2) обычно называется пара процессов (X, B) таких, что выполнено равенство (2) (понимаемое в интегральной форме) и B является броуновским движением (точное определение содержится в параграфе 1.1). Нам же будет удобно понимать под решением (2) один объект, а именно, меру P на пространстве $C(\mathbb{R}_+)$, относительно которой процесс

$$B_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma(X_s)}\, dX_s - \int_0^t \frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)}\, ds$$

является $(\mathcal{F}_t)$-броуновским движением (здесь X обозначает канонический процесс, а $(\mathcal{F}_t)$ — каноническую фильтрацию на $C(\mathbb{R}_+)$). Иными словами, мы рассматриваем решение СДУ (2) как решение соответствующей мартингальной проблемы. При этом существование такого решения равносильно слабому существованию, а единственность такого решения равносильна слабой единственности (см. предложение 1.6).

Для исследования сингулярных СДУ введем следующее определение. Точку $d \in \mathbb{R}$ назовем *особой точкой* для уравнения (2), если

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2} \notin L^1_{\mathrm{loc}}(d)$$

(запись $f \notin L^1_{\mathrm{loc}}(d)$ означает, что $\int_{d-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |f(z)| dz = \infty$ для любого $\varepsilon > 0$). При этом мы будем всегда предполагать, что $\sigma(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Первый вопрос, возникающий в связи с этим определением, состоит в следующем: почему такие точки действительно следует называть особыми для уравнения (2)? В параграфе 2.1 доказывается ряд результатов, указывающих на принципиальное отличие между особыми и неособыми точками. В частности, теоремы 2.5а и 2.5б показывают, что особые точки — это те и только те точки, где локальное время решения обращается в нуль.

Качественное различие между особыми и неособыми точками состоит в следующем. Если нуль — неособая точка для уравнения (2), то, по крайней мере, локально существует единственное решение, выходящее из нуля, и оно является знакопеременным (это вытекает из теоремы 2.8а и из конструкции решения, приведенной в доказательстве этой теоремы). Если же нуль — изолированная особая точка для уравнения (2), то возможна одна из следующих 4 ситуаций:

1. Не существует решения, выходящего из нуля.
2. Существует (локально) единственное решение, выходящее из нуля, и оно положительно.
3. Существует (локально) единственное решение, выходящее из нуля, и оно отрицательно.
4. Существует (локально) как положительное, так и отрицательное решение, выходящее из нуля. (В этом случае могут также существовать знакопеременные решения.)

Точная формулировка содержится в теореме 2.6.

Используя введенную терминологию, можем сказать, что уравнение является сингулярным, если и только если множество его особых точек непусто. Важно при этом отметить, что обычно естественным образом возникают СДУ, имеющие лишь одну особую точку (часто это точка 0). Поэтому наиболее важный класс особых точек представляют *изолированные особые точки.* (Точка $d \in \mathbb{R}$ называется изолированной особой точкой, если она особая и обладает проколотой окрестностью, состоящей из неособых точек.)

Прежде всего приведем ряд примеров, показывающих, как может вести себя решение в окрестности изолированной особой точки. Для уравнения

$$dX_t = -\frac{1}{2X_t}\, I(X_t \neq 0)\, dt + dB_t, \quad X_0 = x$$

нуль является изолированной особой точкой и не существует решения, выходящего из нуля. Это строго доказывается в параграфе 1.4 и неформально может быть объяснено следующим образом. Коэффициент сноса b отрицателен в правой полуокрестности нуля и положителен в левой полуокрестности. Кроме того, снос является очень сильным вблизи нуля. Поэтому он не позволяет решению выйти из этой точки, и единственно возможным остается решение, заданное по формуле $\mathsf{P}(X \equiv 0) = 1$. Но, как легко проверить, эта мера не является решением.

Другим примером служит СДУ для процесса Бесселя

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2X_t}\, I(X_t \neq 0)\, dt + dB_t, \quad X_0 = x_0$$

с $\delta > 1$. Из примера 1.35 следует, что для этого уравнения существует как положительное, так и отрицательное решение, выходящее из нуля. Неформальное объяснение здесь состоит в следующем. Коэффициент сноса b положителен справа от нуля и является достаточно сильным, чтобы обеспечить существование положительного решения. Аналогично, снос отрицателен слева от нуля, и существует отрицательное решение.

Еще одним примером служит СДУ для геометрического броуновского движения

$$dX_t = \mu X_t dt + (\sigma X_t + I(X_t \neq 0)) dB_t, \quad X_0 = x_0$$

(слагаемое $I(X_t \neq 0)$ здесь добавлено для того, чтобы гарантировать выполнение условия $\sigma \neq 0$ в каждой точке; очевидно, добавление этого слагаемого не влияет на свойства решения с $x_0 \neq 0$, но исключает тождественно нулевое решение). Для этого уравнения коэффициенты сноса и диффузии настолько малы вблизи нуля, что решение, выходящее из строго положительной (или строго отрицательной) точки, никогда не достигает нуля.

Как видно из примеров выше, уравнения с изолированными особыми точками часто возникают как в теоретических вопросах, так и в приложениях. До сих пор отсутствовал единый метод исследования поведения решения вблизи таких точек. Не были изучены такие вопросы, как: существует ли решение; единственно ли оно; может ли оно достичь такую точку; может ли оно выйти из такой точки; может ли оно пройти через такую точку и т.д. Подобные вопросы исследовались лишь для некоторых конкретных уравнений.

В настоящей работе проводится полное исследование поведения решения в окрестности изолированной особой точки. Это приводит к построению полной качественной классификации изолированных особых точек. Классификация показывает, может ли решение достичь эту точку справа/слева, может ли оно ее покинуть вправо/влево, может ли оно быть продолжено после достижения этой точки и т.д. При этом на коэффициенты уравнения накладываются минимальные условия регулярности. Именно, мы предполагаем лишь, что коэффициенты b и σ являются измеримыми функциями и $\sigma \neq 0$ поточечно. Для проведения классификации мы прежде всего исследуем поведение решения в односторонней окрестности изолированной особой точки. При этом выделяется 7 различных типов поведения. Они описываются приводимыми ниже теоремами 2.8а–2.8ж.

Для формулировки теорем прежде всего введем необходимые обозначения. Пусть нуль — изолированная особая точка для уравнения (2).

Тогда существует $a > 0$ такое, что

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,a]).$$

Заметим, что интеграл

$$\int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\sigma^2(x)} dx$$

может сходиться. В этом случае соответствующий интеграл должен расходиться в левой полуокрестности нуля. Будем использовать функции

$$\rho(x) = \exp\biggl(\int_x^a \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy\biggr), \quad x \in (0,a],$$

$$s(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \rho(y)dy, & \text{если } \displaystyle\int_0^a \rho(y)dy < \infty, \\ \displaystyle -\int_x^a \rho(y)dy, & \text{если } \displaystyle\int_0^a \rho(y)dy = \infty. \end{cases}$$

Функция s является версией неопределенного интеграла $\int^x \rho(y)dy$. Если $\int_0^a \rho(y)dy < \infty$, выбираем версию, обращающуюся в нуль в нуле; иначе выбираем версию, обращающуюся в нуль в точке a. Можно проверить, что решение в правой полукрестности нуля является регулярным непрерывным строго марковским процессом, и функция s является его *функцией шкалы*. Вместе с тем следует подчеркнуть, что исследование существования, единственности и качественного поведения решений проводится исключительно методами стохастического анализа без обращения к результатам теории марковских процессов.

В приводимых ниже теоремах оказывается более удобным иметь дело не с пространством $C(\mathbb{R}_+)$ непрерывных функций, а с пространством $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ функций, определенных до случайного момента времени. Формальное определение состоит в следующем: $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ состоит из функций $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \cup \{\pi\}$ со следующим свойством: существует момент $\xi(f) \in [0,\infty]$ такой, что f непрерывна на $[0,\xi(f))$ и $f = \pi$ на $[\xi(f),\infty)$. Здесь π — изолированная точка, добавленная к вещественной прямой.

Будем обозначать через X канонический процесс на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ и рассмотрим моменты остановки

$$\begin{aligned} T_a &= \inf\{t \geqslant 0 : X_t = a\}, \\ \overline{T}_a &= \sup_n \inf\{t \geqslant 0 : |X_t - a| \leqslant 1/n\}, \\ T_{a,c} &= T_a \wedge T_c, \\ \overline{T}_{a,c} &= \overline{T}_a \wedge \overline{T}_c \end{aligned}$$

с обычным соглашением $\inf \varnothing = +\infty$ (здесь $a, c \in \mathbb{R}$). Заметим, что $\overline{T}_a$ может не равняться T_a, поскольку может оказаться, что $X = \pi$ в момент $\overline{T}_a$ (тогда $T_a = \infty$). Будем также рассматривать стохастические интервалы

$$\begin{aligned} [\![S, T]\!] &= \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : S(\omega) \leqslant t \leqslant T(\omega)\}, \\ ]\!]S, T]\!] &= \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : S(\omega) < t \leqslant T(\omega)\}, \\ [\![S, T[\![&= \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : S(\omega) \leqslant t < T(\omega)\}, \\ ]\!]S, T[\![&= \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : S(\omega) < t < T(\omega)\}, \end{aligned}$$

где S, T — моменты остановки (при этом необязательно $S \leqslant T$).

В приводимых ниже теоремах используется понятие *решения до случайного момента времени.* Обращение к этому понятию необходимо при описании локального поведения решений вблизи особой точки, поскольку это поведение зависит лишь от поведения коэффициентов в окрестности соответствующей точки, а знание коэффициентов лишь в окрестности позволяет делать утверждения о свойствах решений лишь до момента выхода из этой окрестности. Решение до случайного момента времени — это пара (P, S), где P — вероятностная мера на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$, а S — момент остановки на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ (точное определение содержится в параграфе 1.1). Также оказывается удобным ввести понятие *решения до момента* $S-$ (см. параграф 1.1). Ниже такие решения обозначаются как $(\mathsf{P}, S-)$. Будем говорить, что решение (P, S) (или $(\mathsf{P}, S-)$) *положительно*, если мера P сосредоточена на положительных траекториях.

Теорема 2.8а. *Предположим, что*

$$\int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\sigma^2(x)}dx < \infty.$$

Если $x_0 \in [0,a]$, то существует единственное решение до $T_{0,a}$. При этом $\mathsf{E}_\mathsf{P} T_{0,a} < \infty$ и $\mathsf{P}(X_{T_{0,a}} = 0) > 0$.

Если выполнены условия теоремы 2.8а, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 0.

Теорема 2.8б. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)}dx = \infty.$$

Если $x_0 \in [0,a]$, то существует положительное решение P до T_a, и такое решение единственно. При этом $\mathsf{E}_\mathsf{P} T_a < \infty$ и $\mathsf{P}(\exists t \leqslant T_a : X_t = 0) > 0$.

Если выполнены условия теоремы 2.8б, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 2.

Теорема 2.8в. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}s(x)dx < \infty.$$

(i) *Для любого решения (P, S) имеем $X \leqslant 0$ на $[\![T_0, S]\!]$ P-п.н. (т.е. для любого $t \geqslant 0$ имеем $X_t \leqslant 0$ P-п.н. на $\{T_0 \leqslant t \leqslant S\}$).*

(ii) *Если $x_0 \in [0,a]$, то существует единственное решение P до $T_{0,a}$. При этом $\mathsf{E}_\mathsf{P} T_{0,a} < \infty$ и $\mathsf{P}(X_{T_{0,a}} = 0) > 0$.*

Если выполнены условия теоремы 2.8в, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 1.

Теорема 2.8г. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} s(x)dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{s(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)} dx < \infty.$$

(i) *Если* $x_0 > 0$, *то любое решение* (P, S) *строго положительно.*

(ii) *Если* $x_0 \leqslant 0$, *то любое решение* (P, S) *отрицательно.*

(iii) *Если* $x_0 \in (0,a)$, *то существует единственное решение* P *до* $\overline{T}_{0,a}-$. *При этом* $\mathsf{E_P}\overline{T}_{0,a} < \infty$ *и* $\mathsf{P}(\lim_{t\uparrow\overline{T}_{0,a}} X_t = 0) > 0$.

Если выполнены условия теоремы 2.8г, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 6.

Теорема 2.8д. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{s(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)} dx = \infty.$$

(i) *Если* $x_0 > 0$, *то любое решение* (P, S) *строго положительно.*

(ii) *Если* $x_0 \leqslant 0$, *то любое решение* (P, S) *отрицательно.*

(iii) *Если* $x_0 \in (0,a]$, *то существует единственное решение* P *до* T_a. *При этом* $\mathsf{P}(T_a = \infty) > 0$ *и* $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ P*-п.н. на* $\{T_a = \infty\}$.

Если выполнены условия теоремы 2.8д, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 4.

Теорема 2.8е. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} |s(x)|dx < \infty.$$

(i) *Если* $x_0 > 0$, *то любое решение* (P, S) *строго положительно.*

(ii) *Если* $x_0 \in (0,a]$, *то существует единственное решение* P *до* T_a. *При этом* $\mathsf{E_P} T_a < \infty$.

(iii) *Если* $x_0 = 0$, *то существует положительное решение* P *до* T_a, *и такое решение единственно. При этом* $\mathsf{E_P} T_a < \infty$ *и* $X > 0$ *на* $]\!]0, T_a]\!]$ P*-п.н.*

Если выполнены условия теоремы 2.Е, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 3.

Теорема 2.8ж. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)dx = \infty, \qquad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}|s(x)|dx = \infty.$$

(i) *Если* $x_0 > 0$, *то любое решение* (P, S) *строго положительно.*

(ii) *Если* $x_0 \leqslant 0$, *то любое решение* (P, S) *отрицательно.*

(iii) *Если* $x_0 \in (0, a]$, *то существует единственное решение* P *до* T_a. *При этом* $T_a < \infty$ P*-п.н.*

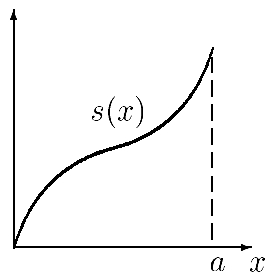
Если выполнены условия теоремы 2.8ж, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 5.

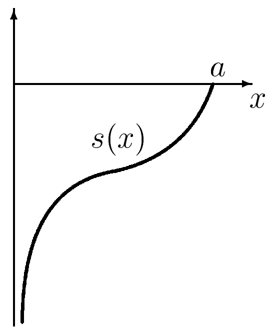
Замечание. Если нуль имеет правый тип 0, 1 или 2, то для любого $x_0 \in (0, a)$ существует решение, достигающее нуля со строго положительной вероятностью. Поэтому типы 0, 1, 2 можно назвать *выходными.* Типы же 3, 4, 5, 6 являются *невыходными* в том смысле, что для них любое решение с $x_0 > 0$ не достигает нуля.

Теоремы 2.8а–2.8ж составляют одностороннюю классификацию изолированных особых точек. В параграфе 2.3 приводятся неформальное и графическое описания этой классификации (см. рис. 2.3 на стр. 97, 98). Односторонняя классификация изолированных особых точек иллюстрируется на рис. 2.

Односторонняя классификация изолированных особых точек составляет содержание параграфов 2.3 и 2.4. В доказательствах используется метод случайной замены времени и преобразования фазового пространства, техника локальных времен непрерывных семимартингалов, приемы склеивания решений и др. Ключевую роль играют вопросы сходимости интегральных функционалов броуновского движения и процессов Бесселя.

- $\sigma \neq 0$, $\dfrac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,a])$
  - $\displaystyle\int_0^a \rho < \infty$
    - $\displaystyle\int_0^a \frac{1+|b|}{\rho\,\sigma^2} < \infty$
      - $\displaystyle\int_0^a \frac{|b|}{\sigma^2} < \infty$ **0**
      - $\displaystyle\int_0^a \frac{|b|}{\sigma^2} = \infty$ **2**
    - $\displaystyle\int_0^a \frac{1+|b|}{\rho\,\sigma^2} = \infty$
      - $\displaystyle\int_0^a \frac{1+|b|}{\rho\,\sigma^2} s < \infty$ **1**
      - $\displaystyle\int_0^a \frac{1+|b|}{\rho\,\sigma^2} s = \infty$
        - $\displaystyle\int_0^a \frac{s}{\rho\,\sigma^2} < \infty$ **6**
        - $\displaystyle\int_0^a \frac{s}{\rho\,\sigma^2} = \infty$ **4**
  - $\displaystyle\int_0^a \rho = \infty$
    - $\displaystyle\int_0^a \frac{1+|b|}{\rho\,\sigma^2}|s| < \infty$ **3**
    - $\displaystyle\int_0^a \frac{1+|b|}{\rho\,\sigma^2}|s| = \infty$ **5**





Типы	Выходные	Невыходные
Входные	2	3
Невходные	0 1	4 5 6

$$\rho(x) = \exp\left(\int_x^a \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}dy\right)$$

$$s(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \rho(y)dy, & \text{если } \displaystyle\int_0^a \rho(y)dy < \infty, \\ \displaystyle -\int_x^a \rho(y)dy, & \text{если } \displaystyle\int_0^a \rho(y)dy = \infty \end{cases}$$

Рис. 2. Односторонняя классификация изолированных особых точек

Двусторонняя классификация и марковские решения

В параграфах 3.1, 3.2 проводится вторая часть классификации изолированных особых точек. Именно, рассматривается поведение решения в двусторонней окрестности изолированной особой точки и исследуется, какие эффекты происходят в результате комбинации правого и левого типов. Приводимые ниже теоремы 3.2а–3.2д указывают на те эффекты, которые происходят в результате комбинации правого и левого типов и не отражаются односторонней классификацией.

Будем говорить, что изолированная особая точка имеет *тип* (i, j), если она имеет левый тип i и правый тип j. (*Левый тип* изолированной особой точки определяется аналогично ее правому типу на основании поведения коэффициентов уравнения в ее левой полуокрестности.)

Пусть нуль — изолированная особая точка для уравнения (2). Тогда существуют числа $a < 0 < c$ такие, что

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}\big([a,c] \setminus \{0\}\big).$$

Если нуль имеет правый тип 0, то

$$\int_0^c \frac{1+|b(x)|}{\sigma^2(x)} dx < \infty.$$

Если же правый тип нуля — один из $1, \ldots, 6$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \frac{1+|b(x)|}{\sigma^2(x)} dx = \infty.$$

(Это легко видеть из рис. 2.)

Если бы нуль имел тип $(0,0)$, то $(1+|b|)/\sigma^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(0)$, т.е. в этом случае нуль не являлся бы изолированной особой точкой. Для остальных 48 комбинаций правых и левых типов $(1+|b|)/\sigma^2 \notin L^1_{\mathrm{loc}}(0)$. Итак, изолированная особая точка может иметь один из 48 возможных типов.

Теорема 3.2а. *Предположим, что нуль имеет тип* (i,j) *с* $i = 0,1,4,5,6$, $j = 0,1,4,5,6$ *(при этом случай* $i = j = 0$ *исключается). Тогда для любого решения* (P,S) *имеем* $S \leqslant T_0$ P*-п.н.*

Теорема 3.2б. *Предположим, что нуль имеет тип* (i,j) *с* $i = 0,1$, $j = 2,3$.

(i) *Для любого решения* (P,S) *имеем* $X \geqslant 0$ *на* $[\![T_0, S]\!]$ P*-п.н.*

(ii) *Если* $x_0 \in [a,c]$, *то существует единственное решение* P *до* $T_{a,c}$.

Теорема 3.2в. *Предположим, что нуль имеет тип* $(2,2)$. *Тогда для любого* $x_0 \in (a,c)$ *существуют различные решения до* $T_{a,c}$.

Теорема 3.2г. *Предположим, что нуль имеет тип* $(2,3)$.

(i) *Для любого решения* (P,S) *имеем* $X > 0$ *на* $]\!]T_{0+}, S]\!]$ P*-п.н., где* $T_{0+} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t > 0\}$.

(ii) *Если* $x_0 \in (a,0]$, *то существуют различные решения до* $T_{a,c}$.

(iii) *Если* $x_0 \in (0,c]$, *то существует единственное решение до* $T_{a,c}$, *и оно строго положительно.*

Теорема 3.2д. *Предположим, что нуль имеет тип* $(3,3)$.

(i) *Если* $x_0 \in [a,0)$, *то существует единственное решение до* $T_{a,c}$, *и оно строго отрицательно.*

(ii) *Если* $x_0 \in (0,c]$, *то существует единственное решение до* $T_{a,c}$, *и оно строго положительно.*

(iii) *Если* $x_0 = 0$, *то существуют различные решения до* $T_{a,c}$. *Их можно описать следующим образом. Если* P *— решение до* $T_{a,c}$, *то существует* $\lambda \in [0,1]$ *такое, что* $\mathsf{P} = \lambda\mathsf{P}^- + (1-\lambda)\mathsf{P}^+$, *где* P^- *— единственное отрицательное решение до* $T_{a,c}$, *а* P^+ *— единственное положительное решение до* $T_{a,c}$.

Мы не приводим здесь утверждений, касающихся типов (i,j) с $i = 4,5,6$, $j = 2,3$, поскольку для этих типов поведение решения в двусторонней окрестности соответствующей точки ясно из односторонней классификации и нет дополнительных эффектов, происходящих из двусторонней комбинации типов.

Теоремы 2.8а–2.8ж (описывающие поведение решения в односторонней окрестности изолированной особой точки) вместе с теоремами 3.2а–3.2д (указывающими на эффекты в двусторонней окрестности, происходящие в результате комбинации правого и левого типов) составляют полную классификацию изолированных особых точек. Из построенной классификации видно, существует ли решение вблизи изолированной особой точки, единственно ли оно и каково его качественное поведение. В частности, оказывается, что изолированные особые точки лишь 4 (из 48) типов нарушают единственность локального решения. Они названы в работе *точками ветвления*. Выделение этих точек — одно из наиболее интересных и важных следствий построенной классификации.

Теория СДУ тесно связана с теорией марковских процессов. Д. Струк и С. Варадан [68; Th. 6.2] доказали, что если для любой начальной точки x_0 существует единственное решение СДУ (2) (более точно, рассматривались многомерные однородные СДУ), то решение обладает строго марковским свойством. Верно и частичное обращение этого утверждения: при некоторых дополнительных ограничениях регулярный непрерывный одномерный строго марковский процесс является решением СДУ (см. работу В. Шмидта [66]). Взаимосвязь между строго марковскими процессами и СДУ в одномерном случае исследовалась также в работах [36], [40], [47].

В параграфе 3.3 мы показываем, что наличие точек ветвления приводит к появлению немарковских решений уравнения (2). В то же время все строго марковские решения в окрестности точки ветвления допускают простое описание. Это — тема параграфа 3.4. В доказательствах используется, в частности, техника регулярных непрерывных строго марковских процессов.

Классификация на бесконечности и частные случаи

В параграфах 4.1, 4.2 рассматривается поведение решения ”в окрестности $+\infty$”. Оказывается, что решение может иметь один из трех возможных типов поведения. Они описываются приводимыми ниже теоремами 4.1а–4.1в.

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условию

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\text{loc}}([a,\infty))$$

для некоторого $a \in \mathbb{R}$. Будем использовать функции

$$\rho(x) = \exp\biggl(-\int_a^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}dy\biggr), \quad x \in [a,\infty),$$
$$s(x) = -\int_x^\infty \rho(y)dy, \quad x \in [a,\infty)$$

и обозначения

$$\overline{T}_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n,$$
$$\overline{T}_{a,\infty} = \overline{T}_a \wedge \overline{T}_\infty.$$

Теорема 4.1а. *Предположим, что*

$$\int_a^\infty \rho(x)dx = \infty.$$

Если $x_0 \in [a,\infty)$, *то существует единственное решение* P *до* T_a. *При этом* $T_a < \infty$ P*-п.н.*

Если выполнены условия теоремы 4.1а, то будем говорить, что $+\infty$ имеет *тип А*.

Теорема 4.1б. *Предположим, что*

$$\int_a^\infty \rho(x)dx < \infty, \quad \int_a^\infty \frac{|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx = \infty.$$

Если $x_0 \in [a, \infty)$, *то существует единственное решение* P *до* T_a. *Если кроме того* $x_0 > a$, *то* $\mathsf{P}(T_a = \infty) > 0$ *и* $\lim_{t\to\infty} X_t = +\infty$ P*-п.н. на* $\{T_a = \infty\}$.

Если выполнены условия теоремы 4.1б, то будем говорить, что $+\infty$ имеет *тип B*.

Теорема 4.1в. *Предположим, что*

$$\int_a^\infty \rho(x)dx < \infty, \quad \int_a^\infty \frac{|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty.$$

Если $x_0 \in (a, \infty)$, *то существует единственное решение* P *до* $\overline{T}_{a,\infty}-$. *При этом* $\mathsf{P}(\overline{T}_\infty < \infty) > 0$. (*Другими словами, решение взрывается в* $+\infty$ *со строго положительной вероятностью.*)

Если выполнены условия теоремы 4.1в, то будем говорить, что $+\infty$ имеет *тип C*.

Замечание. Известный феллеровский критерий взрывов (см. [49]) может быть получен как следствие построенной классификации.

Теоремы 4.1а–4.1в составляют классификацию типов $+\infty$ (аналогично проводится классификация типов $-\infty$). В параграфе 4.1 приводятся неформальное и графическое описания этой классификации (см. рис. 4.2 на стр. 153). Классификация на бесконечности иллюстрируется на рис. 3.

В параграфе 4.3 рассматриваются степенные уравнения, т.е. СДУ вида

$$dX_t = \mu|X_t|^\alpha dt + \nu|X_t|^\beta dB_t, \quad X_0 = x_0. \tag{4}$$

Для этих уравнений предлагается простая процедура определения типа нуля и типа бесконечности (см. рис. 4 и 5).

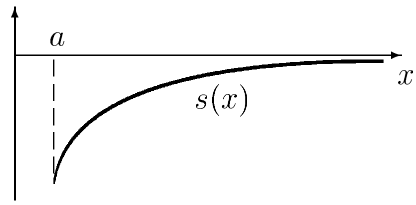
Далее, в параграфе 4.4 мы исследуем, какие типы нуля и типы бесконечности возможны, если коэффициент сноса b имеет постоянный знак (результаты представлены в табл. 2 и 3).

$$\sigma \neq 0\,, \quad \frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}([a,\infty))$$

$$\int_a^\infty \rho = \infty \qquad \textbf{A}$$

$$\int_a^\infty \rho < \infty$$

$$\int_a^\infty \frac{|s|}{\rho\sigma^2} = \infty \qquad \textbf{B}$$



$$\int_a^\infty \frac{|s|}{\rho\sigma^2} < \infty \qquad \textbf{C}$$

Тип	Поведение
A	возвратное
B	невозвратное
C	взрыв

$$\rho(x) = \exp\left(-\int_a^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}dy\right)$$

$$s(x) = -\int_x^\infty \rho(y)dy$$

Рис. 3. Классификация на бесконечности

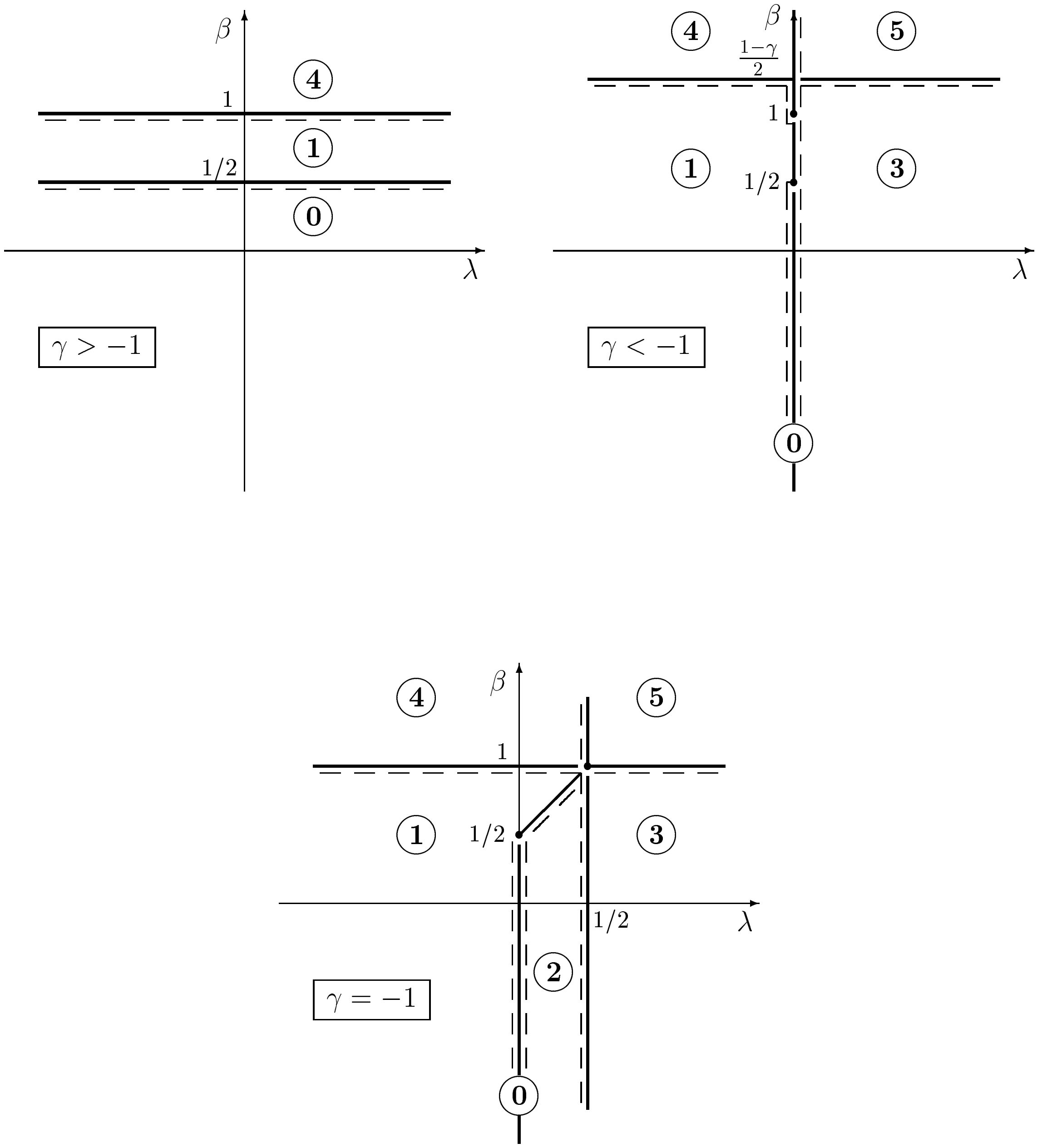


Рис. 4. Классификация в нуле для степенных уравнений. Здесь $\lambda = \mu/\nu^2$, $\gamma = \alpha - 2\beta$, где α, β, μ, ν задаются формулой (4). Сначала следует вычислить γ и выбрать соответствующий рисунок (из трех возможных). Потом следует отметить на этом рисунке точку с координатами (λ, β) и выяснить, какой области она принадлежит. Число (i), отмеченное в этой области, показывает, что нуль имеет правый тип i. Например, если $\gamma < -1$, $\lambda > 0$ и $\beta \geqslant (1-\gamma)/2$, то нуль имеет правый тип 5.

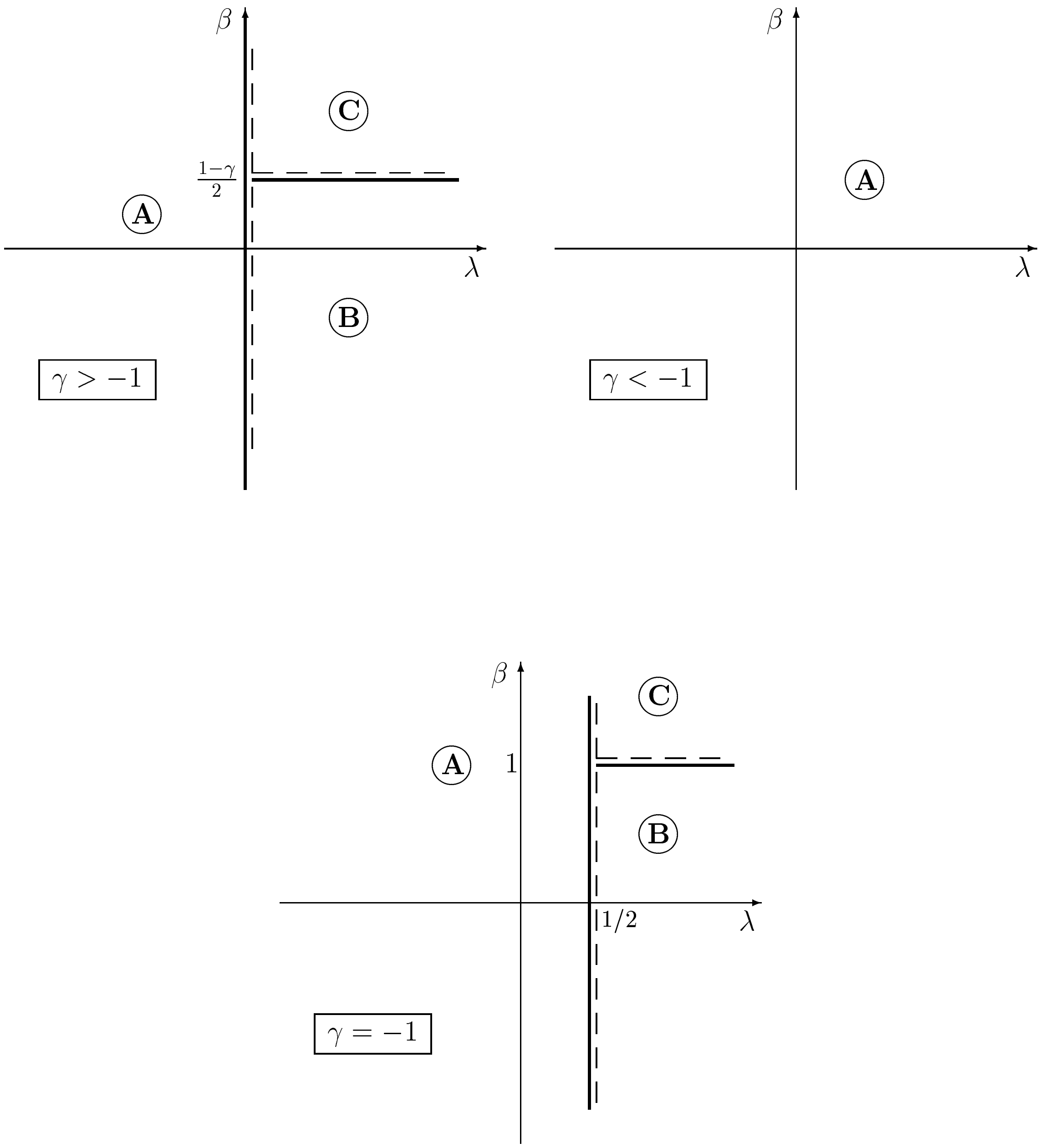


Рис. 5. Классификация на бесконечности для степенных уравнений. Здесь $\lambda = \mu/\nu^2$, $\gamma = \alpha - 2\beta$, где α, β, μ, ν задаются формулой (4). Сначала следует вычислить γ и выбрать соответствующий рисунок (из трех возможных). Потом следует отметить на этом рисунке точку с координатами (λ, β) и выяснить, какой области она принадлежит. Буква Λ, отмеченная в этой области, показывает, что $+\infty$ имеет тип Λ. Например, если $\gamma > -1$, $\lambda > 0$ и $\beta > (1-\gamma)/2$, то $+\infty$ имеет тип D.

	$\sigma^2=1$	σ произвольно
$b \geqslant 0$	0 2 3	0 1 2 3 4 5
$b \leqslant 0$	0 1	0 1 4

Табл. 2. Возможные правые типы нуля в случае сноса постоянного знака

	$\sigma^2=1$	σ произвольно
$b \geqslant 0$	A B C	A B C
$b \leqslant 0$	A	A

Табл. 3. Возможные типы $+\infty$ в случае сноса постоянного знака

Глобальные решения и инвариантные распределения

Как было отмечено выше, при проведении классификации изолированных особых точек и классификации на бесконечности естественно пользоваться понятием *локального решения* или решения до случайного момента времени, так что все решения, рассматриваемые в главах 2–4, являются локальными.

В параграфах 5.1, 5.2 мы применяем результаты глав 2–4 для изучения существования, единственности и качественного поведения *глобальных решений*, т.е. решений в классическом смысле. Это делается лишь для уравнений, имеющих не более одной особой точки (но именно такие уравнения и возникают чаще всего). Результаты представлены теоремами 5.1а–5.1в (схематичное изображение соответствующих утверждений дается в табл. 4–6).

Теорема 5.1а. *Предположим, что уравнение* (2) *не имеет особых точек, т.е.*

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$

(i) *Если* $-\infty$ *и* $+\infty$ *имеют типы A или B, то существует единственное решение* P. *При этом для любого* $a \in \mathbb{R}$ *имеем* $\mathsf{P}(T_a < \infty) > 0$.

(ii) *Если* $-\infty$ *или* $+\infty$ *имеет тип C, то не существует решения.*

Тип $-\infty$	**Тип** $+\infty$	**Сущ.**	**Един.**	**Комментарии**
A B	A B	+	+	решение может достичь любую точку
C		−	+	взрыв в $-\infty$
	C	−	+	взрыв в $+\infty$

Табл. 4. Существование и единственность решения в случае отсутствия особых точек. К примеру, вторая строка отвечает ситуации, когда $-\infty$ имеет тип C и нет ограничений на тип $+\infty$. Таблица показывает, что в этом случае не существует решения, поскольку происходит взрыв в $-\infty$.

Теорема 5.1б. *Предположим, что нуль — единственная особая точка для уравнения* (2). *Пусть* $x_0 > 0$.

(i) *Если* $+\infty$ *имеет тип C, то не существует решения.*

(ii) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i = 0,1,4,5,6$, $j = 0,1$ (*случай* $i = j = 0$ *исключается*), *то не существует решения.*

(iii) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i = 2,3$, $j = 0,1$, $-\infty$ *имеет тип A или B и* $+\infty$ *имеет тип A или B, то существует единственное решение* P. *При этом* $\mathsf{P}(T_0 < \infty) > 0$ *и* $X \leqslant 0$ *на* $[\![T_0, \infty[\![$ P*-п.н.*

(iv) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i = 2,3$, $j = 0,1$, *а* $-\infty$ *имеет тип C, то не существует решения.*

(v) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=0,1,4,5,6$, $j=2$, *а* $+\infty$ *имеет тип A или B, то существует единственное решение* P. *Оно положительно и* $\mathsf{P}(T_0<\infty)>0$.

(vi) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=2,3$, $j=2$, $-\infty$ *имеет тип A или B и* $+\infty$ *имеет тип A или B, то существуют различные решения.*

(vii) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=2,3$, $j=2$, $-\infty$ *имеет тип C, а* $+\infty$ *имеет тип A или B, то существует единственное решение* P. *Оно положительно и* $\mathsf{P}(T_0<\infty)>0$.

(viii) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $j=3,4,5$, *а* $+\infty$ *имеет тип A или B, то существует единственное решение. Оно строго положительно.*

(ix) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $j=6$, *то не существует решения.*

Теорема 5.1в. *Предположим, что нуль — единственная особая точка для уравнения* (2). *Пусть* $x_0=0$.

(i) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=0,1,4,5,6$, $j=0,1,4,5,6$ *(случай* $i=j=0$ *исключается), то не существует решения.*

(ii) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=0,1,4,5,6$, $j=2,3$, *а* $+\infty$ *имеет тип A или B, то существует единственное решение. Оно положительно.*

(iii) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=0,1,4,5,6$, $j=2,3$, *а* $+\infty$ *имеет тип C, то не существует решения.*

(iv) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=2,3$, $j=0,1,4,5,6$, *а* $-\infty$ *имеет тип A или B, то существует единственное решение. Оно отрицательно.*

(v) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=2,3$, $j=0,1,4,5,6$, *а* $-\infty$ *имеет тип C, то не существует решения.*

(vi) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=2,3$, $j=2,3$, $-\infty$ *имеет тип A или B и* $+\infty$ *имеет тип A или B, то существуют различные решения.*

(vii) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=2,3$, $j=2,3$, $-\infty$ *имеет тип A или B, а* $+\infty$ *имеет тип C, то существует единственное решение. Оно отрицательно.*

(viii) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=2,3$, $j=2,3$, $-\infty$ *имеет тип C, а* $+\infty$ *имеет тип A или B, то существует единственное решение. Оно положительно.*

(ix) *Если нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=2,3$, $j=2,3$, $-\infty$ *имеет тип C и* $+\infty$ *имеет тип C, то не существует решения.*

Тема параграфов 5.3, 5.4 — инвариантные распределения для сингулярных уравнений. Проблема существования и единственности инвариантных распределений СДУ является одной из классических проблем стохастического анализа. Известные результаты (см., например, [30]) отвечают случаю, когда коэффициенты уравнения "достаточно регулярны". Для одномерных СДУ это, в частности, означает, что решение, выходящее из любой точки, может достичь любую другую точку, так что носителем инвариантного распределения служит вся вещественная прямая. Однако часто возникает необходимость рассмотрения СДУ, обладающих инвариантными распределениями, сосредоточенными на некотором интервале вещественной прямой. (К примеру, это нужно в моделях стохастической волатильности, используемых в финансовой математике. В этих моделях инвариантное распределение СДУ, задающего волатильность, должно быть сосредоточено на положительной полуоси.) Заметим, что если интервал I не совпадает с $\mathbb{R}$ и уравнение (2) обладает инвариантным распределением μ с $\operatorname{supp}\mu=\overline{I}$ ($\overline{I}$ обозначает замыкание I), то это уравнение должно быть сингулярным в описанном выше смысле. Действительно, если для СДУ (2) выполнено условие (3), то для любого $a\in\mathbb{R}$ решение достигнет уровня a с положительной вероятностью.

Левый тип нуля	**Правый тип нуля**	**Тип** $-\infty$	**Тип** $+\infty$	**Сущ.**	**Един.**	**Комментарии**
			C	−	+	взрыв в $+\infty$
0 1 4 5 6	0 1			−	+	ловушка в нуле
2 3	0 1	A B	A B	+	+	проход через нуль
2 3	0 1	C		−	+	взрыв в $-\infty$
0 1 4 5 6	2		A B	+	+	отражение в нуле
2 3	2	A B	A B	+	−	ветвление в нуле
2 3	2	C	A B	+	+	отражение в нуле
	3 4 5		A B	+	+	решение строго положительно
	6			−	+	ловушка в нуле

Табл. 5. Существование и единственность решения в случае, если нуль — единственная особая точка. Начальная точка строго положительна.

Левый тип нуля	**Правый тип нуля**	**Тип** $-\infty$	**Тип** $+\infty$	**Сущ.**	**Един.**	**Комментарии**
0 1 4 5 6	0 1 4 5 6			−	+	ловушка в нуле
0 1 4 5 6	2 3		A B	+	+	решение положительно
0 1 4 5 6	2 3		C	−	+	взрыв в $+\infty$
2 3	0 1 4 5 6	A B		+	+	решение отрицательно
2 3	0 1 4 5 6	C		−	+	взрыв в $-\infty$
2 3	2 3	A B	A B	+	−	ветвление в нуле
2 3	2 3	A B	C	+	+	решение отрицательно
2 3	2 3	C	A B	+	+	решение положительно
2 3	2 3	C	C	−	+	взрыв в $-\infty$ или $+\infty$

Табл. 6. Существование и единственность решения в случае, если нуль — единственная особая точка. Начальная точка равна нулю.

Мы даем необходимые и достаточные условия существования единственного инвариантного распределения μ для уравнения (2) такого, что μ содержится на интервале $I \subseteq \mathbb{R}$ (он может быть открытым, замкнутым или полуоткрытым) и $\operatorname{supp}\mu = \overline{I}$. При этом на коэффициенты уравнения накладываются минимальные условия регулярности: мы предполагаем лишь, что b и σ — измеримые функции, причем $\sigma(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Для формулировки соответствующей теоремы введем функции

$$\rho(x) = \exp\biggl(-\int^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}\,dy\biggr), \quad x \in \mathring{I}$$

$$s(x) = \int^x \rho(y)dy, \quad x \in \mathring{I},$$

где $\mathring{I}$ обозначает внутренность I, а $\int^x$ обозначает версию неопределенного интеграла. Эти обозначения имеют смысл, если

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathring{I}).$$

Будем также пользоваться следующим соглашением: для $f : I \to \mathbb{R}_+$ утверждение "$\int f(x)dx < \infty$ в концевой точке I" означает, что $\int_{U\cap I} f(x)dx < \infty$ для некоторой окрестности U этой точки; утверждение "$\int f(x)dx = \infty$ в концевой точке I" означает, что $\int_{U\cap I} f(x)dx = \infty$ для любой окрестности U этой точки (концевая точка может быть как конечной, так и бесконечной).

Теорема 5.2. *Имеет место эквивалентность* (i) + (ii) $\Leftrightarrow$ (a) + $\dots$ + (e):

(i) *Для любой начальной точки $x_0 \in I$ существует решение P_{x_0} уравнения* (2) *с* $\mathsf{P}_{x_0}(\forall t \geqslant 0,\ X_t \in I) = 1$, *и такое решение единственно* (X *обозначает канонический процесс на* $C(\mathbb{R}_+)$).

(ii) *Существует инвариантное распределение μ (т.е. для любого* $t \geqslant 0$ $\mathrm{Law}(X_t \mid \mathsf{P}_\mu) = \mu$, *где* $\mathsf{P}_\mu = \int_I \mathsf{P}_x \mu(dx)$), *сосредоточенное* *на* I (*т.е.* $\mu(I) = 1$) *с* $\operatorname{supp}\mu = \overline{I}$, *и такое распределение единственно.*

(a) *Имеем*
$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}\bigl(\mathring{I}\bigr).$$

(b) *Имеем*
$$\frac{1}{\rho\sigma^2} \in L^1(I)$$
(*т.е.* $\int_I \rho^{-1}(x)\sigma^{-2}(x)dx < \infty$).

(c) *В бесконечных концевых точках* I *имеем*
$$\int \rho(x)dx = \infty.$$

(d) *В конечных концевых точках* I, *не принадлежащих* I, *имеем*
$$\int \rho(x)dx = \infty.$$

(e) *В конечных концевых точках* I, *принадлежащих* I, *имеем либо*
$$\int \rho(x)dx < \infty, \quad \int \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,dx < \infty, \quad \int \frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)}\,dx = \infty,$$
либо
$$\int \rho(x)dx = \infty, \quad \int \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,|s(x)|dx < \infty.$$

Если эти условия выполнены, то мера μ, *описанная в* (ii), *имеет вид*
$$\mu(dx) = \frac{c}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,dx,$$
где c — *нормирующий множитель. Более того, для любого распределения* ν, *сосредоточенного на* I, *имеем*
$$\mathrm{Law}(X_t \mid \mathsf{P}_\nu) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathrm{Var}} \mu,$$
где $\mathsf{P}_\nu = \int_I \mathsf{P}_x \nu(dx)$.

Структура работы

В главе 1 содержатся основные определения, факты и примеры, касающиеся теории СДУ. Также в этой главе представлены и собственные результаты автора. Это теоремы 1.16а, 1.16б и пример 1.35.

Результаты настоящей работы, составляющие классификацию изолированных особых точек и классификацию на бесконечности, даются в главах 2–4. Применения построенной классификации приведены в главе 5.

В приложении A собраны факты из стохастического анализа, используемые в работе. Технические леммы отнесены в приложение B.

Цитируемые утверждения названы предложениями. Собственные результаты автора названы теоремами (вспомогательные утверждения — леммами).

Диссертация содержит 6 таблиц (см. стр. 82, 165, 167, 169, 172) и 12 рисунков (см. стр. 62, 88, 96, 97, 98, 132, 133, 148, 152, 153, 157, 161), в том числе 7 иллюстраций с смоделированными на компьютере траекториями решений сингулярных СДУ.

Апробация диссертации

Автор выступал с докладами на следующих конференциях, где излагались также и результаты, относящиеся к диссертации:

- *Workshop on Mathematical Finance.* Франция, Париж, 1998.
  Тезисы: Vector stochastic integrals in the fundamental theorem of asset pricing.// Paris, INRIA, 1998, p. 149–163.

- *Ломоносовские Чтения-1999.* Москва, МГУ, 1999.

- *Колмогоровские Чтения-1999.* Москва, МГУ, 1999.
  Тезисы: О сильных и слабых решениях стохастических дифферен-

циальных уравнений, определяющих процессы Бесселя.// Теория вероятностей и ее применения, **44** (1999), №. 3, с. 699.

- *Mathématiques Financières.* Франция, Париж, 1999.

  Тезисы: Convergence of some integrals associated with Bessel processes.// Paris, INRIA, 1999, p. 405–425.

- *Second Nordic-Russian Symposium on Stochastic Analysis.* Норвегия, Бейтостолен, 1999.

- *12th Winter School on Stochastic Processes.* Германия, Зигмундсбург, 2000.

  Тезисы: Isolated singular points of stochastic differential equations (совм. с Х.-Ю. Энгельбертом).// In: R. Buckdahn, H.-J. Engelbert, M. Yor (Eds.). Stochastic processes and related topics. Taylor & Francis, 2002, p. 55–80.

- *Workshop on Lévy Processes and Related Subjects.* Дания, Орхус, 2000.

- *Workshop on Fluid Mechanics and Stochastic Flows.* Дания, Орхус, 2001.

- *12th European Young Statisticians Meeting.* Словакия, Янска Долина, 2001.

- *Second World Congress of the Bachelier Finance Society.* Греция, Крит, 2002.

  Тезисы в электронном виде: Improper stochastic integrals in the Fundamental Theorems of Asset Pricing (совм. с А.Н. Ширяевым).// `www.ma.utexas.edu/Bachelier2002`.

- *Конференция "Колмогоров и Современная Математика".* Москва, МГУ, 2003.

  Тезисы: On minimization and maximization of entropy in various disciplines (совм. с В.П. Масловым).// Москва, 2003, с. 408–409.

Тезисы: On the absolute continuity and singularity of probability measures on a filtered space (совм. с М.А. Урусовым).// Москва, 2003, с. 410–411.

- *Third World Congress of the Bachelier Finance Society.* США, Чикаго, 2004.

  Тезисы в электронном виде: General arbitrage pricing model: probability and possibility approaches.// `www.uic.edu/orgs/bachelier`.

- *Workshop on Stochastic Equations and Related Topics* (конференция, посвященная 60-летию Х.-Ю. Энгельберта). Германия, Йена, 2005.

Кроме того, автор выступал с докладами в следующих зарубежных университетах:

- Институт Исаака Ньютона, Кембридж, Великобритания, 2005.
- Политехнический Институт Цюриха (ETH), Швейцария, 2004.
- Технический Университет Вены, Австрия, 2002, 2004.
- Университет Анже, Франция, 2003.
- Университет Йены, Германия, 1999, 2000, 2001, 2002, 2004.
- Университет Кембриджа, Великобритания, 2002.
- Университет Лондона, Великобритания, 2002.
- Университет Миннесоты, США, 2001.
- Университет Орхуса, Дания, 2000.
- Университет Париж-VI, Франция, 2003.

Помимо этого, автор читал лекции на летней школе "From Lévy processes to semimartingales: recent theoretical developments and applications in finance", организованной Университетом Орхуса (Дания) в 2002 г.

Автор дважды выступал на заседаниях Московского Математического Общества (2002, 2004) и 8 раз — на Большом Кафедральном Семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова (1999, 2000, 2001, 2002, 2003).

Тематика диссертации тесно примыкает к различным аспектам стохастического анализа, таким как: стохастические интегралы, интегральные функционалы диффузионных процессов, локальные времена, свойства броуновского движения, абсолютная непрерывность и сингулярность вероятностных мер. С тематикой диссертации связаны работы автора [71], [72], [73], [74], [75], [76], [77], [78], [79], [80], [81], [82], [83], [84], [85], а также монография [86]. В электронном виде эти и другие статьи можно найти на сайте автора: `http://mech.math.msu.su/~cherny`.

Работы [73], [75], [79], [80], [84] были отмечены премией Европейской Академии для молодых российских ученых. Вручение премии состоялось 23 ноября 2004 г. на 31м этаже Главного Здания Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Автор выражает благодарность своему учителю члену-корреспонденту РАН профессору А.Н. Ширяеву за интерес к работе, важные рекомендации и ценные замечания.

Глава 1

Стохастические дифференциальные уравнения: определения, утверждения, примеры

§ 1.1 Базовые определения

Рассмотрим наиболее общий тип СДУ, т.е. уравнения вида (1). Отметим, что начальная точка x_0 фиксируется вместе с b и σ. Согласно нашей терминологии, уравнения с одинаковыми b и σ, но с разными начальными точками считаются разными уравнениями.

Определение 1.1. (i) *Решением* уравнения (1) называется пара процессов (X, B), заданных на фильтрованном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathsf{P}\big)$, такая, что

(a) B является m-мерным $(\mathcal{F}_t)$-броуновским движением, т.е. B является m-мерным броуновским движением, выходящим из нуля, а также $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-мартингалом;

(b) для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \Bigg(\sum_{i=1}^n |b_s^i(X)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\sigma_s^{ij}(X))^2 \Bigg) ds < \infty \quad \mathsf{P}\text{-п.н.};$$

(c) для любых $t \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$

$$X_t^i = x_0^i + \int_0^t b_s^i(X)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_s^{ij}(X)dB_s^j \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

(ii) Для уравнения (1) имеет место *слабое существование*, если на некотором фильтрованном вероятностном пространстве существует решение этого уравнения.

Определение 1.2. **(i)** Решение (X, B) называется *сильным решением*, если процесс X согласован с фильтрацией $\left(\overline{\mathcal{F}}_t^B\right)$, где $\overline{\mathcal{F}}_t^B$ — σ-алгебра, порожденная $\sigma(B_s;\ s \leqslant t)$ и всеми множествами P-меры нуль из $\sigma(B_s;\ s \geqslant 0)$.

(ii) Для уравнения (1) имеет место *сильное существование*, если на некотором фильтрованном вероятностном пространстве существует сильное решение этого уравнения.

Замечание. Решения в смысле определения 1.1 часто называются *слабыми решениями.* Мы же будем их называть просто *решениями.* Однако существование такого решения будет обозначаться термином *слабое существование*, чтобы подчеркнуть отличие от *сильного существования*, т.е. существования сильного решения.

Определение 1.3. Для уравнения (1) имеет место *слабая единственность*, если для любых решений (X, B) и $(\widetilde{X}, \widetilde{B})$ (они могут быть определены на разных вероятностных пространствах) выполнено $\mathrm{Law}(X_t;\ t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(\widetilde{X}_t;\ t \geqslant 0)$.

Определение 1.4. Для уравнения (1) имеет место *сильная единственность*, если для любых решений (X, B) и $(\widetilde{X}, B)$ (определенных на одном вероятностном пространстве) выполнено $\mathsf{P}(\forall t \geqslant 0,\ X_t = \widetilde{X}_t) = 1$.

Замечание. Если у (1) нет решений, то имеют место слабая и сильная единственность.

В дальнейшем нам будет удобно понимать под решением не пару процессов, а один объект, именно, меру на пространстве траекторий. Для этого напомним определение мартингальной проблемы, восходящее к работам Д. Струка и С. Варадана [67], [68].

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и

$$b : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n,$$

$$a : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

являются предсказуемыми функционалами. Предположим, что для любых $t \geqslant 0$ и $\omega \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ матрица $a_t(\omega)$ положительно определена.

Обозначим через $X = (X_t;\, t \geqslant 0)$ *канонический процесс* на $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, т.е. процесс, определенный по формуле

$$X_t : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \ni \omega \longmapsto \omega(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим через $(\mathcal{F}_t)$ *каноническую фильтрацию* на $C(\mathbb{R}_+)$, т.е. $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s;\, s \leqslant t)$. Наконец, $\mathcal{F} := \bigvee_{t \geqslant 0} \mathcal{F}_t = \sigma(X_s;\, s \geqslant 0)$. Заметим, что $\mathcal{F}$ совпадает с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n))$.

Определение 1.5. *Решением мартингальной проблемы* (x_0, b, a) *называется мера* P *на* $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n))$ *такая, что*

(a) $\mathsf{P}(X_0 = x_0) = 1$;

(b) для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \Bigg(\sum_{i=1}^n |b_s^i(X)| + \sum_{i=1}^n a^{ii}(X) \Bigg) ds < \infty \quad \mathsf{P}\text{-п.н.};$$

(c) для любого $i = 1, \dots, n$ процесс

$$M_t^i = X_t^i - \int_0^t b_s^i(X) ds, \quad t \geqslant 0$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом;

(d) для любых $i, j = 1, \dots, n$ процесс

$$M_t^i M_t^j - \int_0^t a_s^{ij}(X) ds, \quad t \geqslant 0$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом.

Рассмотрим теперь уравнение (1) и положим

$$a_t(\omega) = \sigma_t(\omega)\sigma_t^*(\omega), \quad t \geqslant 0,\ \omega \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n),$$

где σ^* обозначает транспонированную матрицу σ. Тогда мартингальная проблема (x_0, b, a) называется *мартингальной проблемой, соответствующей уравнению* (1). Связь между (1) и этой мартингальной проблемой становится ясной из следующего утверждения.

Предложение 1.6. **(i)** *Пусть* (Z, B) *— решение уравнения* (1)*. Тогда мера* $\mathsf{P} = \mathrm{Law}(Z_t;\, t \geqslant 0)$ *является решением мартингальной проблемы* (x_0, b, a).

(ii) *Пусть* P *— решение мартингальной проблемы* (x_0, b, a). *Тогда существуют фильтрованное вероятностное пространство* $\big(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q}\big)$ *и пара процессов* (Z, B) *на этом пространстве такие, что* (Z, B) *является решением уравнения* (1) *и* $\mathrm{Law}(Z_t;\, t \geqslant 0) = \mathsf{P}$.

Доказательство можно найти, например, в [86; Th. 1.27] или [57; § 5.4.B]

В дальнейшем будет уделено значительное внимание уравнению (2). Для этого уравнения мы будем изучать слабые решения и слабую единственность. При этом нам будет удобно понимать решение как решение соответствующей мартингальной проблемы, т.е. в смысле приводимого ниже определения (через X обозначаем канонический процесс на $C(\mathbb{R}_+)$, а через $(\mathcal{F}_t)$ обозначаем каноническую фильтрацию на $C(\mathbb{R}_+)$).

Определение 1.7. *Решением* уравнения (2) назовем меру P на $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+))$ такую, что

(a) $\mathsf{P}(X_0 = x_0) = 1$;

(b) для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \big(|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\big)ds < \infty \quad \mathsf{P}\text{-п.н.};$$

(c) процесс

$$M_t = X_t - \int_0^t b(X_s)ds, \quad t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом;

(d) процесс

$$M_t^2 - \int_0^t \sigma^2(X_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом.

Замечание. Если принять за основу определение 1.7, то *существование* и *единственность* решения определяются очевидным образом. Из предложения 1.6 следует, что существование решения в смысле определения 1.7 равносильно слабому существованию (определение 1.1); единственность решения в смысле определения 1.7 равносильна слабой единственности (определение 1.3).

Определение 1.8. (i) Решение P уравнения (2) *положительно*, если $\mathsf{P}(\forall t \geqslant 0,\, X_t \geqslant 0) = 1$.

(ii) Решение P уравнения (2) *строго положительно*, если $\mathsf{P}(\forall t \geqslant 0,\, X_t > 0) = 1$.

Отрицательные и *строго отрицательные* решения определяются аналогично.

При изучении сингулярных уравнений типа (2) нам понадобится определение решения до случайного момента времени. Отметим, что это понятие рассматривалось в работах [46], [47], [57; Ch. 5, Def. 5.1]. Для определения решения до случайного момента времени заменим пространство $C(\mathbb{R}_+)$ непрерывных функций пространством $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$, определяемым ниже. (Это пространство необходимо для рассмотрения взрывающихся решений.) Добавим к вещественной прямой изолированную точку π.

Определение 1.9. Пространство $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ состоит из функций $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \cup \{\pi\}$ со следующим свойством: существует момент $\xi(f) \in [0, \infty]$ такой, что f непрерывна на $[0, \xi(f))$ и $f = \pi$ на $[\xi(f), \infty)$.

Обозначим через $X = (X_t;\ t \geqslant 0)$ *канонический процесс* на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$, т.е.

$$X_t : \overline{C}(\mathbb{R}_+) \ni \omega \longmapsto \omega(t) \in \mathbb{R} \cup \{\pi\},$$

а через $(\mathcal{F}_t)$ — *каноническую фильтрацию* на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$, т.е. $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s;\ s \leqslant t)$. Положим, $\mathcal{F} := \bigvee_{t\geqslant 0} \mathcal{F}_t = \sigma(X_s;\ s \geqslant 0)$.

Замечание. На пространстве $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ существует метрика со следующими свойствами:

(a) Она превращает $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ в польское пространство.

(b) Сходимость $f_n \to f$ равносильна следующему:

$$\xi(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(f);$$
$$\forall t < \xi(f),\ \sup_{s\leqslant t} |f_n(s) - f(s)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(В частности, $C(\mathbb{R}_+)$ замкнуто в этой метрике.)

(c) Борелевская (относительно этой метрики) σ-алгебра на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ совпадает с $\sigma(X_t;\ t \geqslant 0)$.

В дальнейшем нам понадобятся 2 определения: решение до S и решение до $S-$.

Определение 1.10. Пусть S —момент остановки на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$. *Решением уравнения* (2) *до* S (или *решением, определенным до* S) назовем меру P на $\mathcal{F}_S$ такую, что

(a) $\mathsf{P}(\forall t \leqslant S,\ X_t \neq \pi) = 1$;

(b) $\mathsf{P}(X_0 = x_0) = 1$;

(c) для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^{t\wedge S} \big(|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\big) ds < \infty \quad \mathsf{P}\text{-п.н.};$$

(d) процесс

$$M_t = X_{t\wedge S} - \int_0^{t\wedge S} b(X_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом;

(e) процесс

$$M_t^2 - \int_0^{t\wedge S} \sigma^2(X_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом.

В дальнейшем будем также говорить, что (P, S) *является решением* (2).

Замечания. (i) Мера P задается на $\mathcal{F}_S$, а не на $\mathcal{F}$, поскольку иначе она не может быть единственной.

(ii) В обычном определении локального мартингала вероятностная мера определена на $\mathcal{F}$. Здесь же P задана на меньшей σ-алгебре $\mathcal{F}_S$. Однако, ввиду равенства $M_{t\wedge S} = M_t$, знание P лишь на $\mathcal{F}_S$ достаточно для проверки включения $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$, возникающего в (d). Иными словами, если $\widetilde{\mathsf{P}}$ и $\widetilde{\mathsf{P}}'$ — вероятностные меры на $\mathcal{F}$ такие, что $\widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_S = \widetilde{\mathsf{P}}'|\mathcal{F}_S = \mathsf{P}$, то $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$, если и только если $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}}')$ (так что можно писать просто $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$). Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что включение $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$ означает существование последовательности моментов остановки (S_n) такой, что

(a) $S_n \leqslant S_{n+1}$;

(b) $S_n \leqslant S$;

(c) для любого $t \geqslant 0$ $\widetilde{\mathsf{P}}(t\wedge S_n = t \wedge S) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (заметим, что $\{t\wedge S_n = t\wedge S\} \in \mathcal{F}_S$);

(d) для любых $s \leqslant t$, $C \in \mathcal{F}_s$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\big[\big(M_{t\wedge S_n} - M_{s\wedge S_n}\big)I(C)\big] = 0.$$

Последнее выражение имеет смысл, поскольку случайная величина

$$\big(M_{t\wedge S_n} - M_{s\wedge S_n}\big)I(C) = \big(M_{t\wedge S_n} - M_{s\wedge S_n}\big)I(C \cap \{S_n > s\})$$

$\mathcal{F}_S$-измерима.

Аналогично, для проверки условий (a), (b), (c), (e) определения 1.10 достаточно знать лишь значения P на $\mathcal{F}_S$.

Определение 1.11. (i) Решение P, определенное до S, *положительно*, если $\mathsf{P}(\forall t \leqslant S,\, X_t \geqslant 0) = 1$.

(ii) Решение P, определенное до S, *строго положительно*, если $\mathsf{P}(\forall t \leqslant S,\, X_t > 0) = 1$.

Отрицательные и *строго отрицательные* решения определяются аналогично.

Напомним, что отображение $S : \overline{C}(\mathbb{R}_+) \to [0, \infty]$ называется *предсказуемым моментом остановки*, если существует последовательность $(\mathcal{F}_t)$-моментов остановки (S_n) такая, что

(a) $S_n \leqslant S_{n+1}$;

(b) $S_n \leqslant S$ и $S_n < S$ на множестве $\{S > 0\}$;

(c) $\lim_n S_n = S$.

Последовательность (S_n) называется *упреждающей последовательностью* для S.

Напомним также, что σ-алгебра $\mathcal{F}_{S-}$ — это σ-алгебра, порожденная множествами $A \cap \{S > t\}$, где $t \geqslant 0$ и $A \in \mathcal{F}_t$.

Определение 1.12. Пусть S — предсказуемый момент остановки на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ с упреждающей последовательностью (S_n). *Решением уравнения* (2) *до* $S-$ (или *решением, определенным до* $S-$) называется мера P на $\mathcal{F}_{S-}$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ сужение P на $\mathcal{F}_{S_n}$ является решением до S_n.

В дальнейшем будем также говорить, что $(\mathsf{P}, S-)$ *является решением* (2).

Замечания. (i) Очевидно, это определение не зависит от выбора упреждающей последовательности.

(ii) Если $(\mathsf{P}, S-)$ — решение (2), то $\mathsf{P}(\forall t < S,\, X_t \neq \pi) = 1$.

(iii) При работе с решениями до S можно обойтись пространством $C(\mathbb{R}_+)$. Пространство $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ необходимо лишь для решений до $S-$.

В дальнейшем будем использовать следующую терминологию: решение в смысле определения 1.7 будем называть *глобальным* решением, а решение в смысле определения 1.10 или 1.12 будем называть *локальным* решением. Следующее утверждение проясняет связь между этими понятиями.

Лемма 1.13. **(i)** *Предположим, что* (P, S) *является решением* (2) *в смысле определения* 1.10 *и* $S = \infty$ P*-п.н. Тогда* P *допускает единственное продолжение* $\widetilde{\mathsf{P}}$ *на* $\mathcal{F}$. *Пусть* Q *— мера на* $C(\mathbb{R}_+)$, *определяемая как сужение* $\widetilde{\mathsf{P}}$ *на* $\{\xi(X) = \infty\} = C(\mathbb{R}_+)$. *Тогда* Q *является решением* (2) *в смысле определения* 1.7.

(ii) *Пусть* Q *— решение* (2) *в смысле определения* 1.7. *Зададим меру* P *на* $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ *равенством* $\mathsf{P}(A) = \mathsf{Q}(A \cap \{\xi(X) = \infty\})$. *Тогда* (P, ∞) *является решением* (2) *в смысле определения* 1.10.

Доказательство. **(i)** Существование и единственность $\widetilde{\mathsf{P}}$ вытекают из леммы B.5.

Вторая часть **(i)** и утверждение **(ii)** очевидны.

§ 1.2 Теорема Ямада–Ватанабэ и связанные вопросы

В этом параграфе опишем взаимосвязь между различными типами существования и единственности для уравнения (1).

Теорема 1.14. *Пусть* (X, B) *— сильное решение* (1) *на некотором фильтрованном вероятностном пространстве* $\bigl(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathsf{P}\bigr)$.

(i) *Существует измеримое отображение*

$$\Phi : \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m), \mathcal{B}\big) \longrightarrow \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \mathcal{B}\big)$$

($\mathcal{B}$ *обозначает борелевскую* σ*-алгебру) такое, что процесс* $\Phi(B)$ $\big(\overline{\mathcal{F}}_t^B\big)$*-согласован и* $X = \Phi(B)$ P*-п.н.*

(ii) *Пусть* $\widetilde{B}$ *—* m*-мерное* $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)$*-броуновское движение на* $\big(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t), \widetilde{\mathsf{P}}\big)$ *и* $\widetilde{X} := \Phi(\widetilde{B})$*. Тогда* $(\widetilde{X}, \widetilde{B})$ *является сильным решением* (1)*.*

Доказательство. **(i)** Обозначим через P^W винеровскую меру на $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$, а через Y — канонический процесс на этом пространстве. Положим $\mathcal{G}_t^0 = \sigma(Y_s;\, s \leqslant t)$ и обозначим через $\mathcal{G}_t$ пополнение $\mathcal{G}_t^0$ по мере P^W (т.е. к $\mathcal{G}_t^0$ добавляются все множества P^W-меры нуль из $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m))$). Для любого $q \in \mathbb{Q}_+$ существует $\mathcal{G}_q$-измеримое отображение $\chi_q : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$ такое, что $X_q(\omega) = \chi_q(B(\omega))$ для P-п.в. ω. Положим

$$A = \big\{y \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m) \mid \exists \varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) : \forall q \in \mathbb{Q}_+,\ \chi_q(y) = \varphi(q)\big\}.$$

Из непрерывности X следует, что

$$\mathsf{P}^W(A) \geqslant \mathsf{P}(\forall q \in \mathbb{Q}_+,\ X_q = \chi_q(B)) = 1.$$

Итак, $A \in \mathcal{G}_0$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ процесс

$$\begin{aligned}\Psi_t^{(n)}(y) &= \chi_0(y)\, I(t = 0)\\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{k/2^n}(y)\, I\big(k/2^n < t \leqslant (k+1)/2^n\big), \quad t \geqslant 0,\ y \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)\end{aligned}$$

является $(\mathcal{G}_t)$-опциональным (по поводу определения, см. [17; Гл. 1, § 1a]). Поэтому процесс

$$\Psi_t(y) = I(y \in A) \limsup_{n\to\infty} \Psi_t^{(n)}(y), \quad t \geqslant 0,\ y \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$$

также является $(\mathcal{G}_t)$-опциональным. Из определения A следует, что Ψ непрерывен по t для любого $y \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$. Обозначим через $\mathcal{G}$ пополнение $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m))$ по мере P^W. Тогда Ψ является $\mathcal{G}|\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n))$-измеримым. Следовательно, существует измеримое отображение

$$\Phi : (C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m), \mathcal{B}) \longrightarrow (C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \mathcal{B})$$

такое, что Ψ и Φ P^W-неразличимы. Кроме того, для любого $t \geqslant 0$ $\Phi_t(B) = X_t$ P-п.н. Итак, процессы $\Phi(B)$ и X неразличимы.

(ii) Достаточно заметить, что для любого $t \geqslant 0$ отображение $\Phi_t : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$ является $\mathcal{G}_t$-измеримым и, кроме того, для любого $t \geqslant 0$

$$\Phi_t(y) = \Phi_0(y) + \int_0^t b(\Phi_s(y))\, ds + \int_0^t \sigma(\Phi_s(y))\, dy_s \quad \mathsf{P}^W\text{-п.н.} \qquad \square$$

Сформулируем теперь известный результат Ямада и Ватанабэ.

Предложение 1.15 (Ямада, Ватанабэ). *Предположим, что для СДУ* (1) *имеет место сильная единственность. Тогда*

(i) *Для* (1) *имеет место слабая единственность.*

(ii) *Существует измеримое отображение*

$$\Phi : \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m), \mathcal{B}\big) \longrightarrow \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \mathcal{B}\big)$$

такое, что процесс $\Phi(B)$ *является* $\big(\overline{\mathcal{F}}_t^B\big)$*-согласованным и для любого решения* (X, B) *уравнения* (1) *имеем* $X = \Phi(B)$ P*-п.н.*

Доказательство можно найти в [70], [63; Ch. IX, Th. 1.7] или [64; Ch. V.3].

Следующий результат дополняет теорему Ямада–Ватанабэ.

Теорема 1.16a. *Предположим, что для* (1) *имеют место слабая единственность и сильное существование. Тогда имеет место сильная единственность.*

Ключевым утверждением при доказательстве этой теоремы служит следующий результат. Он показывает, что слабая единственность влечет более сильное свойство.

Теорема 1.16б. *Предположим, что для* (1) *имеет место слабая единственность. Тогда для любых решений* (X, B) *и* $(\widetilde{X}, \widetilde{B})$ (*они могут быть заданы на разных вероятностных пространствах*) *выполнено* $\mathrm{Law}(X_t, B_t;\, t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(\widetilde{X}_t, \widetilde{B}_t;\, t \geqslant 0)$.

Замечание. Предположим, что для СДУ (1) $n = m = 1$, а $\sigma_t(x) \neq 0$ для любых $t \geqslant 0$, $x \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. В этом случае теорема 1.16б практически тривиальна. Достаточно заметить, что B является измеримым функционалом X:

$$B_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma_s(X)}\, dM_s,$$

где

$$M_t = X_t - \int_0^t b_s(X)\, ds.$$

Если же $n > 1$, $m > 1$ или σ может принимать нулевое значение, то такое рассуждение не проходит.

Для доказательства теорем 1.16а и 1.16б нам потребуется несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1.17. *Пусть* $t \geqslant 0$ *и* $f \in L^2([0,t])$. *Для* $k \in \mathbb{N}$ *положим*

$$f^{(k)}(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } s \in \left[0, \frac{t}{k}\right], \\ \dfrac{k}{t} \displaystyle\int_{\frac{(i-1)t}{k}}^{\frac{it}{k}} f(r)\, dr, & \text{если } s \in \left(\frac{it}{k}, \frac{(i+1)t}{k}\right],\ (i = 1, \dots, k-1). \end{cases}$$

Тогда $f^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{L^2([0,t])} f$.

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
\|f^{(k)}\|^2_{L^2([0,t])} &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{t}{k}\left(\frac{k}{t}\int_{\frac{(i-1)t}{k}}^{\frac{it}{k}} f(r)\,dr\right)^2 \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\frac{(i-1)t}{k}}^{\frac{it}{k}} f^2(r)\,dr \leqslant \\
&\leqslant \int_0^t f^2(r)\,dr = \|f\|^2_{L^2([0,t])}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Существует функция $\varphi \in C([0,t])$ такая, что $\|\varphi - f\|_{L^2([0,t])} < \varepsilon$. Обозначим через $\varphi^{(k)}$ функцию, построенную по φ так же, как $f^{(k)}$ построена по f. С учетом (1.2), имеем

$$\|\varphi^{(k)} - f^{(k)}\|_{L^2([0,t])} \leqslant \|\varphi - f\|_{L^2([0,t])} < \varepsilon$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку φ непрерывна, существует $K \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $k \geqslant K$ выполнено $\|\varphi^{(k)} - \varphi\|_{L^2([0,t])} < \varepsilon$. Отсюда вытекает требуемый результат.

Напомним теперь следующий общий факт из теории меры. Пусть $\eta : \Omega \to E$ — случайный элемент на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, принимающий значения в польском пространстве $(E, \mathcal{B}(E))$. Пусть $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Тогда существует *условное распределение* η относительно $\mathcal{G}$, т.е. семейство $(\mathsf{Q}_\omega)_{\omega\in\Omega}$ вероятностных мер на $(E, \mathcal{B}(E))$ такое, что

(i) для любого $A \in \mathcal{B}(E)$ отображение $\omega \mapsto \mathsf{Q}_\omega(A)$ $\mathcal{G}$-измеримо;

(ii) для любых $A \in \mathcal{B}(E)$, $D \in \mathcal{G}$

$$\mathsf{P}(D \cap \{\eta \in A\}) = \int_D \mathsf{Q}_\omega(A)\,\mathsf{P}(d\omega).$$

Условное распределение единственно в следующем смысле: если $(\widetilde{\mathsf{Q}}_\omega)_{\omega\in\Omega}$ — другое семейство с теми же свойствами, то $\mathsf{Q}_\omega = \widetilde{\mathsf{Q}}_\omega$ для P-п.в. ω.

Замечание. Свойства (i), (ii) означают, что для любой $\mathcal{B}(E)$-измеримой ограниченной функции h случайная величина $\eta(\omega) := \mathsf{E}_{\mathsf{Q}_\omega}[h]$

является версией $\mathsf{E}_\mathsf{P}[h(\eta)|\mathcal{G}]$. Заметим также, что если для множества $A \in \mathcal{B}(E)$ выполнено свойство $\mathsf{P}(\eta \in A) = 1$, то $\mathsf{Q}_\omega(A) = 1$ для P-п.в. ω. □

Лемма 1.18. *Пусть* (X, B) *— решение* (1) *на фильтрованном вероятностном пространстве* $\bigl(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathsf{P}\bigr)$. *Пусть* $(\mathsf{Q}_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *— условное распределение* (X, B) *относительно* $\mathcal{F}_0$ *(здесь* (X, B) *рассматривается как* $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n+m})$*-значный случайный элемент). Обозначим через* Y *процесс, состоящий из первых* n *координат канонического процесса на* $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n+m})$ *и через* Z *процесс, состоящий из последних* m *координат. Пусть* $(\mathcal{H}_t)$ *— каноническая фильтрация на* $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n+m})$ *и* $\mathcal{H} = \bigvee_{t\geqslant 0} \mathcal{H}_t$. *Тогда для* P*-п.в.* ω *пара* (Y, Z) *является решением* (1) *на* $\bigl(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n+m}), \mathcal{H}, (\mathcal{H}_t), \mathsf{Q}_\omega\bigr)$.

Доказательство. Проверим выполнение условий (a)–(c) определения 1.1.

(a) Для любых $0 \leqslant s \leqslant t$, $D \in \mathcal{H}_s$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathcal{F}_0$ выполнено

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}_\mathsf{P}\bigl[\exp\{i(\lambda, B_t - B_s)\}\, I\bigl((X, B) \in D\bigr)\, I_A\bigr]\\&= \exp\biggl\{-(t-s)\frac{\|\lambda\|^2}{2}\biggr\}\, \mathsf{E}_\mathsf{P}\bigl[I\bigl((X, B) \in D\bigr)\, I_A\bigr].\end{aligned}$$

Следовательно, для любых $0 \leqslant s \leqslant t$, $D \in \mathcal{H}_s$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ имеем

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}_\omega}[\exp\{i(\lambda, Z_t - Z_s)\}\, I_D] = \exp\biggl\{-(t-s)\frac{\|\lambda\|^2}{2}\biggr\}\, \mathsf{Q}_\omega(I_D)$$

для P-п.в. ω. Выбирая счетный набор $\{s_k, t_k, D_{kl}, \lambda_{kl};\ k, l \in \mathbb{N}\}$ таким образом, что последовательность (s_k, t_k) пробегает все пары неотрицательных рациональных чисел ($s_k \leqslant t_k$), совокупность $\{D_{kl};\ l \in \mathbb{N}\}$ порождает $\mathcal{H}_{s_k}$, а множество $\{\lambda_{kl};\ l \in \mathbb{N}\}$ плотно в $\mathbb{R}^m$, заключаем, что для P-п.в. ω, процесс Z является m-мерным $(\mathcal{H}_t, \mathsf{Q}_\omega)$-броуновским движением.

(b) Для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \biggl(\sum_{i=1}^n |b_s^i(X)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\sigma_s^{ij}(X))^2\biggr) ds < \infty \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

Следовательно, для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \Bigl(\sum_{i=1}^n |b_s^i(Y)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\sigma_s^{ij}(Y))^2\Bigr) ds < \infty \quad \mathsf{Q}_\omega\text{-п.н.}$$

для P-п.в. ω.

(c) Фиксируем $t \geqslant 0$. Для $k \in \mathbb{N}$ определим процесс

$$\sigma^{(k)} : \mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \ni (s, y) \longmapsto \sigma_s^{(k)}(y) \in \mathbb{R}$$

по формуле

$$\sigma_s^{(k)}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } s \in \bigl[0, \frac{t}{k}\bigr], \\ \dfrac{k}{t} \displaystyle\int_{\frac{(i-1)t}{k}}^{\frac{it}{k}} \sigma_r(y)\, dr, & \text{если } s \in \bigl(\frac{it}{k}, \frac{(i+1)t}{k}\bigr],\ (i = 1, \dots, k-1). \end{cases}$$

Согласно лемме 1.17,

$$\int_0^t \bigl\|\sigma_s^{(k)}(X) - \sigma_s(X)\bigr\|^2 ds \xrightarrow[k\to\infty]{\mathsf{P}\text{-п.н.}} 0. \tag{1.3}$$

Следовательно,

$$\int_0^t \sigma_s^{(k)}(X)\, dB_s \xrightarrow[k\to\infty]{\mathsf{P}} \int_0^t \sigma_s(X)\, dB_s,$$

что означает сходимость

$$\sum_{i=2}^k \sigma_{\frac{it}{k}}^{(k)}(X)\Bigl(B_{\frac{it}{k}} - B_{\frac{(i-1)t}{k}}\Bigr) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathsf{P}} X_t - x - \int_0^t b_s(X)\, ds \tag{1.4}$$

(здесь использована векторная форма записи). Существует подпоследовательность $(k(l))$ такая, что вдоль нее сходимость в (1.4) имеет место P-п.н. Поэтому

$$\sum_{i=2}^{k(l)} \sigma_{\frac{it}{k(l)}}^{(k(l))}(Y)\Bigl(Z_{\frac{it}{k(l)}} - Z_{\frac{(i-1)t}{k(l)}}\Bigr) \xrightarrow[l\to\infty]{\mathsf{Q}_\omega\text{-п.н.}} Y_t - x - \int_0^t b_s(Y)\, ds \tag{1.5}$$

для P-п.в. ω. С другой стороны, в силу (1.3),

$$\int_0^t \bigl\|\sigma_s^{(k)}(Y) - \sigma_s(Y)\bigr\|^2 ds \xrightarrow[k\to\infty]{\mathsf{Q}_\omega\text{-п.н.}} 0$$

для P-п.в. ω, откуда

$$\int_0^t \sigma_s^{(k)}(Y)\,dZ_s \xrightarrow[k\to\infty]{\mathsf{Q}_\omega} \int_0^t \sigma_s(Y)\,dZ_s \tag{1.6}$$

для P-п.в. ω. С учетом (1.5) и (1.6), получаем

$$Y_t - x - \int_0^t b_s(Y)\,ds = \int_0^t \sigma_s(Y)\,dZ_s \quad \mathsf{Q}_\omega\text{-п.н.}$$

для P-п.в. ω. Это завершает доказательство. □

`Доказательство теоремы 1.16б`. Пусть (X,B) — решение (1) на фильтрованном вероятностном пространстве $\bigl(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),\mathsf{P}\bigr)$. Пусть $(W_t)_{t\geqslant 0}$ и $(\overline{W}_t)_{t\geqslant 0}$ — независимые m-мерные $(\mathcal{F}'_t,\mathsf{P}')$-броуновские движения. Положим

$$\bigl(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},(\widetilde{\mathcal{F}}_t),\widetilde{\mathsf{P}}\bigr) = \bigl(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),\mathsf{P}\bigr)\times\bigl(\Omega',\mathcal{F}',(\mathcal{F}'_t),\mathsf{P}'\bigr).$$

Процессы X, B, W, $\overline{W}$ определяются на $\widetilde{\Omega}$ очевидным образом. Пара (X,B) является решением (1) на $\bigl(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},(\widetilde{\mathcal{F}}_t),\widetilde{\mathsf{P}}\bigr)$, а W, $\overline{W}$ являются независимыми m-мерными $(\widetilde{\mathcal{F}}_t,\widetilde{\mathsf{P}})$-броуновскими движениями.

Для любых $t\geqslant 0$, $y\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$ матрица $\sigma_t(y)$ соответствует линейному оператору $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\varphi_t(y)$ $m\times m$-матрицу оператора ортогональной проекции на $(\ker\sigma_t(y))^\perp$; обозначим через $\psi_t(y)$ $m\times m$-матрицу оператора ортогональной проекции на $\ker\sigma_t(y)$. Процессы $\varphi=\varphi_t(y)$ и $\psi=\psi_t(y)$ являются предсказуемыми $\mathbb{R}^{m\times m}$-значными процессами на $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$.

Положим

$$U_t = \int_0^t \varphi_s(X)\,dB_s + \int_0^t \psi_s(X)\,dW_s, \tag{1.7}$$

$$V_t = \int_0^t \varphi_s(X)\,d\overline{W}_s + \int_0^t \psi_s(X)\,dB_s. \tag{1.8}$$

Тогда $2m$-мерный процесс (U,V) является непрерывным $(\widetilde{\mathcal{F}}_t,\widetilde{\mathsf{P}})$-локальным мартингалом. Для любых $i,j=1,\dots,m$, с учетом симметричности матриц $\varphi_t(y)$, $\psi_t(y)$, имеем

$$\begin{aligned}\langle U^i, U^j\rangle_t &= \int_0^t \Big(\sum_{k=1}^m \varphi_s^{ik}(X)\varphi_s^{jk}(X) + \sum_{k=1}^m \psi_s^{ik}(X)\psi_s^{jk}(X)\Big)ds \\ &= \int_0^t \Big(\big(\varphi_s(X)e_i\,, \varphi_s(X)e_j\big) + \big(\psi_s(X)e_i\,, \psi_s(X)e_j\big)\Big)ds \\ &= \int_0^t \big(\varphi_s(X)e_i + \psi_s(X)e_i\,, \varphi_s(X)e_j + \psi_s(X)e_j\big)\,ds \\ &= \int_0^t (e_i\,, e_j)\,ds = \delta_{ij}t,\end{aligned}$$

где $(e_i)_{i=1}^m$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает квадратическую ковариацию (по поводу определения, см. [63; Ch. IV, § 1]). Аналогично,

$$\begin{aligned}\langle U^i, V^j\rangle_t &= \int_0^t \big(\varphi_s(X)e_i\,, \psi_s(X)e_j\big)\,ds = 0, \\ \langle V^i, V^j\rangle_t &= \delta_{ij}t.\end{aligned}$$

Согласно характеризационной теореме Леви (см. [63; Ch. IV, Th. 3.6]), заключаем, что процесс (U,V) является $2m$-мерным $(\widetilde{\mathcal{F}}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$-броуновским движением.

Для любого $t \geqslant 0$ выполнено

$$\begin{aligned}\int_0^t \sigma_s(X)\,dB_s &= \int_0^t (\sigma_s(X)\varphi_s(X))\,dB_s \\ &= \int_0^t \sigma_s(X)\,d\Big(\int_0^s \varphi_r(X)\,dB_r\Big) \\ &= \int_0^t \sigma_s(X)\,d\Big(\int_0^s \varphi_r(X)\,dU_r\Big) \\ &= \int_0^t \sigma_s(X)\,dU_s,\end{aligned}$$

где $\sigma_s(X)\varphi_s(X)$ обозначает произведение матриц. Следовательно, (X,U) — решение (1) на $\big(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t), \widetilde{\mathsf{P}}\big)$.

Рассмотрим фильтрацию

$$\mathcal{G}_s = \widetilde{\mathcal{F}}_s \vee \sigma(V_t;\, t \geqslant 0) = \widetilde{\mathcal{F}}_s \vee \sigma(V_t - V_s;\, t \geqslant s), \quad s \geqslant 0.$$

Из характеризационной теоремы Леви (см. [63; Ch. IV, Th. 3.6]) вытекает, что для любого $s \geqslant 0$ σ-алгебры $\widetilde{\mathcal{F}}_s$ и $\sigma(U_t - U_s;\, t \geqslant s) \vee \sigma(V_t - V_s;\, t \geqslant s)$ независимы. Поэтому для любых $0 \leqslant s \leqslant t$, $i = 1, \dots, m$, $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$, $D \in \sigma(V_t - V_s;\, t \geqslant s)$ имеем

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}[(U_t^i - U_s^i)\, I_D\, I_A] = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}[(U_t^i - U_s^i)\, I_D]\, \widetilde{\mathsf{P}}(A) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}[U_t^i - U_s^i]\, \widetilde{\mathsf{P}}(D)\, \widetilde{\mathsf{P}}(A) = 0.$$

Следовательно, U является m-мерным $(\mathcal{G}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$-броуновским движением. Поскольку стохастический интеграл $\int_0^t \sigma_s(X)\, dU_s$ одинаков относительно фильтраций $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)$ и $(\mathcal{G}_t)$, пара (X, U) является решением (1) на $\bigl(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\mathcal{G}_t), \widetilde{\mathsf{P}}\bigr)$.

Пусть $(\mathsf{Q}_{\widetilde{\omega}})_{\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}}$ — условное распределение (X, U) относительно $\mathcal{G}_0$. По лемме 1.18, пара (Y, Z) является решением (1) на $\bigl(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n+m}), \mathcal{H}, (\mathcal{H}_t), \mathsf{Q}_{\widetilde{\omega}}\bigr)$ для $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.в. $\widetilde{\omega}$. Поскольку для (1) имеет место слабая единственность, заключаем, что распределение $\mathrm{Law}(Y_t;\, t \geqslant 0 \,|\, \mathsf{Q}_{\widetilde{\omega}})$ (которое является условным распределением X относительно $\mathcal{G}_0$) одно и то же для $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.в. $\widetilde{\omega}$. Это означает независимость процесса X от $\mathcal{G}_0$. В частности, X и V независимы.

Для любых $t \geqslant 0$, $y \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ сужение оператора $\sigma_t(y)$ на $(\ker \sigma_t(y))^\perp$ является биекцией из $(\ker \sigma_t(y))^\perp \subseteq \mathbb{R}^m$ в $\operatorname{Im} \sigma_t(y) \subseteq \mathbb{R}^n$. Определим оператор $\chi_t(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ следующим образом: $\chi_t(y)$ отображает $\operatorname{Im} \sigma_t(y)$ на $(\ker \sigma_t(y))^\perp$ как обратный к $\sigma_t(y)$; $\chi_t(y)$ равен нулю на $(\operatorname{Im} \sigma_t(y))^\perp$. Очевидно, $\chi = \chi_t(y)$ — предсказуемый $\mathbb{R}^{m \times n}$-значный процесс на $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$. Имеем $\chi_t(y)\sigma_t(y) = \varphi_t(y)$. Следовательно,

$$\int_0^t \varphi_s(X)\, dB_s = \int_0^t (\chi_s(X)\sigma_s(X))\, dB_s = \int_0^t \chi_s(X)\, dM_s,$$

где

$$M_t = \int_0^t \sigma_s(X)\, dB_s = X_t - x - \int_0^t b_s(X)\, ds.$$

Учитывая (1.8), получаем

$$B_t = \int_0^t \varphi_s(X)\, dB_s + \int_0^t \psi_s(X)\, dB_s = \int_0^t \chi_s(X)\, dM_s + \int_0^t \psi_s(X)\, dV_s. \quad (1.9)$$

Процесс M является измеримым функционалом X, в то время как V независим от X. Итак, (1.9) показывает, что распределение $\mathrm{Law}(X_t, B_t;\, t \geqslant 0)$ одно и то же для всех решений (X, B). $\square$

`Доказательство теоремы 1.16а`. Пусть (X, B) — сильное решение (1) на некотором пространстве $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathsf{P}\big)$. Обозначим через $(\mathsf{Q}_\omega)_{\omega \in \Omega}$ условное распределение процесса X относительно $\sigma(B_t;\, t \geqslant 0)$. Существует набор мер $(\mathsf{R}_y)_{y \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)}$ такой, что $\mathsf{Q}_\omega = \mathsf{R}_{B(\omega)}$ для P-п.в. ω. Неформально можно записать $\mathsf{R}_y = \mathrm{Law}(X \mid B = y)$. По теореме Ямада–Ватанабэ, существует измеримое отображение

$$\Phi : \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m), \mathcal{B}\big) \longrightarrow \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \mathcal{B}\big)$$

такое, что $X(\omega) = \Phi(B(\omega))$ для P-п.в. ω. Это означает, что $\mathsf{R}_y = \delta_{\Phi(y)}$ для п.в. y относительно винеровской меры на $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$.

Пусть теперь $(\widetilde{X}, \widetilde{B})$ — некоторое решение (1) на $\big(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t), \widetilde{\mathsf{P}}\big)$. Положим $\widetilde{\mathsf{R}}_y = \mathrm{Law}(\widetilde{X} \mid \widetilde{B} = y)$. Из теоремы 1.16б вытекает, что $\mathrm{Law}(X, B) = \mathrm{Law}(\widetilde{X}, \widetilde{B})$. Следовательно, $\mathsf{R}_y = \widetilde{\mathsf{R}}_y$ для п.в. y. Итак, $\widetilde{\mathsf{R}}_y = \delta_{\Phi(y)}$ для п.в. y. Это означает, что $\widetilde{X}(\widetilde{\omega}) = \Phi(\widetilde{B}(\widetilde{\omega}))$ для $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.в. $\widetilde{\omega}$, что влечет единственность по распределению. $\square$

Ситуацию с решениями СДУ можно теперь описать следующим образом.

Может случиться, что ни на каком вероятностном пространстве не существует решения уравнения (1) (см. примеры 1.28, 1.29).

Может оказаться, что на некотором фильтрованном вероятностном пространстве существует решение (или даже несколько решений с одним и тем же броуновским движением), в то время как на другом фильтрованном вероятностном пространстве с другим броуновским движением не существует решения (см. примеры 1.30, 1.31, 1.32 и 1.36).

Если существует сильное решение (1) на некотором фильтрованном вероятностном пространстве, то на любом другом фильтрованном веро-

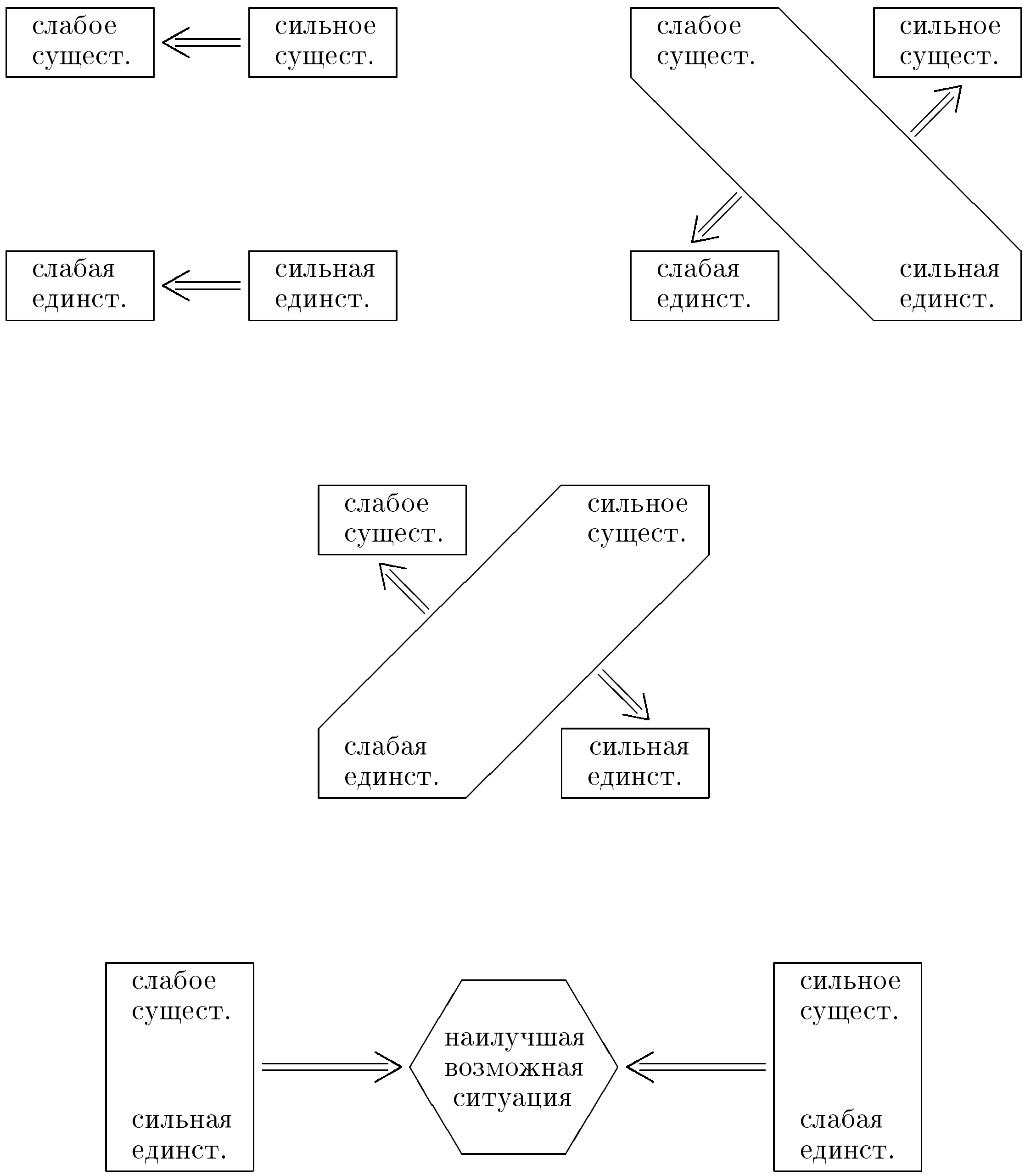


Рис. 1.1. Связь между различными типами существования и единственности. Верхние диаграммы показывают очевидные импликации и импликации, вытекающие из теоремы Ямада–Ватанабэ. Средняя диаграмма показывает одну очевидную импликацию и импликацию, вытекающую из теоремы 1.16а. Нижняя диаграмма иллюстрирует теорему Ямада–Ватанабэ и теорему 1.16а в терминах "наилучшей возможной ситуации".

ятностном пространстве с броуновским движением также существует решение (см. теорему 1.14). Однако может оказаться, что имеются разные решения с одним и тем же броуновским движением (см. примеры 1.33–1.35).

Если для (1) имеет место сильная единственность и существует решение на некотором фильтрованном вероятностном пространстве, то и на любом другом пространстве с броуновским движением существует в точности одно решение, и оно является сильным (теорема Ямада–Ватанабэ). Это — наилучшая возможная ситуация.

Итак, теорема Ямада–Ватанабэ показывает, что сильная единственность вместе со слабым существованием гарантируют наилучшую возможную ситуацию. Теорема 1.16a показывает, что слабая единственность вместе с сильным существованием гарантируют наилучшую возможную ситуацию.

§ 1.3 Достаточные условия существования и единственности

Утверждения этого параграфа относятся к СДУ, для которых $b_t(X) = b(t, X_t)$ и $\sigma_t(X) = \sigma(t, X_t)$, где $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ — измеримые функции.

Сначала изложим достаточные условия сильного существования и сильной единственности. Первый результат такого типа был получен К. Ито.

Предложение 1.19 (Ито). *Предположим, что для СДУ*

$$dX_t^i = b^i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma^{ij}(t, X_t)dB_t^j, \quad X_0 = x_0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

существует константа $C > 0$ *такая, что*

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leqslant C\|x - y\|, \quad t \geqslant 0,\ x, y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\|b(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| \leqslant C(1 + \|x\|), \quad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$\|b(t,x)\| := \left(\sum_{i=1}^{n} (b^i(t,x))^2\right)^{1/2},$$
$$\|\sigma(t,x)\| := \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\sigma^{ij}(t,x))^2\right)^{1/2}.$$

Тогда имеют место сильное существование и сильная единственность.

Доказательство можно найти в [54], [57; Ch. 5, Th. 2.9] или [26; Теор. 5.2.1].

В следующем утверждении условие липшицевости коэффициентов существенно ослаблено. Однако рассматриваются лишь одномерные уравнения.

Предложение 1.20 (Звонкин). *Предположим, что для одномерного СДУ*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0$$

коэффициент b *измерим и ограничен, коэффициент* σ *непрерывен и ограничен и существуют константы* $C > 0$, $\varepsilon > 0$ *такие, что*

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant C\sqrt{|x - y|}, \quad t \geqslant 0,\ x, y \in \mathbb{R},$$
$$|\sigma(t,x)| \geqslant \varepsilon, \quad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Тогда имеют место сильное существование и сильная единственность.

Доказательство можно найти в [18].

Для однородных уравнений существует более сильный результат.

Предложение 1.21 (Энгельберт, Шмидт). *Предположим, что для СДУ (2) $\sigma \neq 0$ в каждой точке, $b/\sigma^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и существует константа $C > 0$ такая, что*

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant C\sqrt{|x-y|}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$
$$|b(x)| + |\sigma(x)| \leqslant C(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда имеют место сильное существование и сильная единственность.

Доказательство можно найти в [47; Th. 5.53].

Замечание. В работе Н.В. Крылова и М. Рекнера [59] были получены достаточные условия сильного существования и сильной единственности для многомерного СДУ

$$dX_t^i = b^i(t, X_t)dt + dB_t^i, \quad X_0 = x_0 \quad (i = 1, \ldots, d)$$

с единичной матрицей диффузии и сингулярным коэффициентом сноса (удовлетворяющим некоторому условию интегрируемости). Обзор литературы по уравнениям такого вида (они тесно связаны с системами взаимодействующих частиц) содержится в [35].

Следующее утверждение гарантирует лишь сильную единственность. Его главное отличие от предложения 1.20 заключается в том, что коэффициент диффузии не предполагается отделенным от нуля.

Предложение 1.22 (Ямада, Ватанабэ). *Предположим, что для одномерного СДУ*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0$$

существует константа $C > 0$ и строго возрастающая функция $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ с $\int_0^{0+} h^{-2}(x)dx = +\infty$ такие, что

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leqslant C|x-y|, \quad t \geqslant 0,\ x, y \in \mathbb{R},$$
$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant h(|x-y|), \quad t \geqslant 0,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Тогда имеет место сильная единственность.

Доказательство можно найти в [57; Ch. 5, Prop. 2.13], [63; Ch. IX, Th. 3.5] или [64; Ch. V, Th. 40.1].

Перейдем теперь к результатам, связанным со слабым существованием и слабой единственностью. Первый из них гарантирует лишь слабое существование. Он почти покрывается дальнейшими результатами, но не полностью. Именно, матрица диффузии здесь не предполагается строго эллиптической (она может быть даже не квадратной).

Предложение 1.23 (Скороход). *Предположим, что для СДУ*

$$dX^i_t = b^i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma^{ij}(t, X_t)dB^j_t, \quad X^i_0 = x^i_0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

коэффициенты b *и* σ *непрерывны и ограничены. Тогда имеет место слабое существование.*

Доказательство можно найти в [29] или [64; Ch. V, Th. 23.5].

Замечание. Условия предложения 1.23 не гарантируют ни сильное существование (см. пример 1.31), ни слабую единственность (см. пример 1.34).

В следующем утверждении условия на b и σ существенно ослаблены по сравнению с предыдущим результатом.

Предложение 1.24 (Струк, Варадан). *Предположим, что для СДУ*

$$dX^i_t = b^i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(t, X_t)dB^j_t, \quad X_0 = x_0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

коэффициент b *измерим и ограничен, коэффициент* σ *непрерывен и ограничен и для любых* $t \geqslant 0$ *и* $x \in \mathbb{R}^n$ *существует константа* $\varepsilon(t, x) > 0$ *такая, что*

$$\|\sigma(t, x)\lambda\| \geqslant \varepsilon(t, x)\|\lambda\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда имеют место слабое существование и слабая единственность.

Доказательство можно найти в [67; Th. 4.2, 5.6].

В следующем утверждении условие ограниченности сноса заменено более слабым.

Предложение 1.25 (Портенко). *Предположим, что для СДУ*

$$dX_t^i = b^i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij}(t, X_t)dB_t^j, \quad X_0 = x_0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

коэффициент b *измерим и существует константа* $\delta > 0$ *такая, что*

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |b(s, x)|^{n+\delta} ds dx < \infty, \quad t \geqslant 0,$$

в то время как коэффициент σ *непрерывен и ограничен и существует константа* $\varepsilon > 0$ *такая, что*

$$\|\sigma(t, x)\lambda\| \geqslant \varepsilon \|\lambda\|, \quad t \geqslant 0, \ x \in \mathbb{R}^n \ \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда имеют место слабое существование и слабая единственность.

Доказательство можно найти в [28].

В следующем утверждении коэффициент σ не предполагается непрерывным. Однако рассматриваются лишь однородные СДУ.

Предложение 1.26 (Крылов). *Предположим, что для СДУ*

$$dX_t^i = b^i(X_t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij}(X_t)dB_t^j, \quad X_0 = x_0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

коэффициент b *измерим и ограничен, коэффициент* σ *измерим и ограничен и существует константа* $\varepsilon > 0$ *такая, что*

$$\|\sigma(x)\lambda\| \geqslant \varepsilon \|\lambda\|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда имеет место слабое существование. Если кроме того $n \leqslant 2$, *то имеет место слабая единственность.*

Доказательство можно найти в [23].

Замечание. В случае $n > 2$ условия предложения 1.26 не гарантируют слабую единственность (см. пример 1.36).

Для одномерных однородных СДУ имеет место более сильный результат.

Предложение 1.27 (Энгельберт, Шмидт). *Предположим, что для СДУ* (2) $\sigma \neq 0$ *в каждой точке и*

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$

Тогда существует единственное решение до $S-$, *где* $S = \sup_n \inf\{t \geqslant 0 : |X_t| = n\}$, *а* X *обозначает канонический процесс на* $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ (*решение понимается в смысле определения 1.12*).

Замечание. При условиях предложения 1.27 может не существовать глобального решения, поскольку решение может взрываться.

Схема доказательства предложения 1.27. Доказательство основано на методе замены времени и преобразования фазового пространства. Опишем суть этого метода.

Преобразование фазового пространства. Рассмотрим функции

$$\rho(x) = \exp\biggl(-\int^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}\,dy\biggr), \quad x \in \mathbb{R},$$
$$s(x) = \int^x \rho(y)dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\int^x$ обозначает версию неопределенного интеграла (так что ρ определяется с точностью до умножения на положительную константу, а s определяется с точностью до положительного аффинного преобразования). Для того чтобы избежать технических сложностей, сделаем два дополнительных предположения (полное доказательство без этих предположений можно найти в [47] или [57; Ch. 5]):

(a) $s(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, т.е. $s(-\infty) = -\infty$ и $s(+\infty) = +\infty$;

(b) произведение $\rho\sigma$ отделено от нуля на $\mathbb{R}$.

При этих предположениях решение не взрывается, и нам будет удобно доказывать существование и единственность в смысле определений 1.1 и 1.3 (согласно предложению 1.6, это эквивалентно существованию единственного решения в смысле определения 1.7).

Пусть (X, B) — решение (2) на пространстве $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathsf{P}\big)$. Тогда для процесса $Y = s(X)$ имеем согласно формуле Ито–Танака и формуле для времен пребывания,

$$
\begin{aligned}
Y_t &= s(x_0) + \int_0^t \rho(X_s)dX_s - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{2b(x)}{\sigma^2(x)}\,\rho(x)L_t^x(X)dx \\
&= s(x_0) + \int_0^t \rho(X_s)b(X_s)ds + \int_0^t \rho(X_s)\sigma(X_s)dB_s - \int_0^t \frac{b(X_s)}{\sigma^2(X_s)}\,\rho(X_s)d\langle X\rangle_s \\
&= \int_0^t \rho(X_s)\sigma(X_s)dB_s = \int_0^t \varkappa(Y_s)dB_s, \quad t \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

где $\varkappa(y) := \rho(s^{-1}(y))\sigma(s^{-1}(y))$, а $L_t^x(X)$ обозначает локальное время процесса X, проведенное в точке x до момента t. Итак, пара (Y, B) является решением СДУ

$$
dX_t = \varkappa(X_t)dB_t, \quad X_0 = s(x_0). \tag{1.10}
$$

Обратно, если пара (Y, B) служит решением уравнения (1.10), то пара (X, B), где $X := s^{-1}(Y)$, является решением (2).

Иными словами, мы свели уравнение (2) к (1.10).

Замена времени. Этот метод используется для доказательства существования и единственности решения уравнения (1.10).

Для доказательства существования фиксируем броуновское движение W, выходящее из точки $s(x_0)$ на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, и положим

$$A_t = \int_0^t \frac{1}{\varkappa^2(W_s)}\,ds, \quad t \geqslant 0,$$
$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\}, \quad t \geqslant 0.$$

Заметим, что $1/\varkappa^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Из формулы для времен пребывания и предложения A.6 вытекает, что $A_t < \infty$ п.н. для любого $t \geqslant 0$. Кроме того, $A_t \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ п.н. (это вытекает из предложения A.9), и поэтому $\tau_t < \infty$ п.н. для любого $t \geqslant 0$. Из предложения A.16 следует, что процесс $X_t = W_{\tau_t}$ является непрерывным локальным мартингалом относительно фильтрации $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}^W_{\tau_t}$, где $(\mathcal{F}^W_t)$ — натуральная фильтрация W. Кроме того, его квадратическая вариация имеет вид $\langle X \rangle_t = \langle W \rangle_t = \tau_t$. Используя формулу замены времени (см. предложение A.18), получаем

$$\langle X \rangle_t = \tau_t = \int_0^{\tau_t} \varkappa^2(W_s)dA_s = \int_0^t \varkappa^2(W_{\tau_s})ds = \int_0^t \varkappa^2(X_s)ds, \quad t \geqslant 0.$$

Положим

$$B_t = \int_0^t \frac{1}{\varkappa(X_s)}\,dX_s, \quad t \geqslant 0.$$

Тогда B является непрерывным $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом с

$$\langle B \rangle_t = \int_0^t \frac{1}{\varkappa^2(X_s)}\,d\langle X \rangle_s = t, \quad t \geqslant 0.$$

По характеризационной теореме Леви (см. [63; Ch. IV, Th. 3.6]), B является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-броуновским движением. Итак, (X, B) — решение уравнения (1.10).

Докажем теперь слабую единственность для (1.10). Пусть (X, B) — решение (1.10) на пространстве $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathsf{P}\big)$. Тогда X — непрерывный $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальный мартингал с

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \varkappa^2(X_s)ds, \quad t \geqslant 0.$$

Положим
$$\varphi_t = \inf\{s \geqslant 0 : \langle X\rangle_s > t\}, \quad t \geqslant 0.$$
Из предположения (b) выше следует, что функция $\varkappa$ отделена от нуля на $\mathbb{R}$ и, следовательно, $\varphi_t < \infty$ п.н. для любого $t \geqslant 0$. Из предложения A.16 следует, что процесс $V_t = X_{\varphi_t}$ является непрерывным локальным мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_{\varphi_t})$. Кроме того, $\langle V\rangle_t = \langle X\rangle_{\varphi_t} = t$. По характеризационной теореме Леви, V является $(\mathcal{F}_{\varphi_t}, \mathsf{P})$-броуновским движением. Используя формулу замены времени (см. предложение A.18), получаем
$$\varphi_t = \int_0^{\varphi_t} \frac{1}{\varkappa^2(X_s)}\, d\langle X\rangle_s = \int_0^t \frac{1}{\varkappa^2(X_{\varphi_s})}\, ds = \int_0^t \frac{1}{\varkappa^2(V_s)}\, ds, \quad t \geqslant 0.$$
Далее,
$$\langle X\rangle_t = \inf\{s \geqslant 0 : \varphi_s > t\} = \inf\left\{s \geqslant 0 : \int_0^s \frac{1}{\varkappa^2(V_r)}\, dr\right\}, \quad t \geqslant 0$$
и $X_t = V_{\langle X\rangle_t}$. Итак, X получается из V в точности той же процедурой, что была описана в доказательстве существования. Это означает, что распределение X определено однозначно. $\square$

§ 1.4 Десять важных примеров

В примерах ниже будем использовать *характеристические диаграммы* $\boxed{|||}$ для формулировки результатов каждого примера. Первый квадрат диаграммы отвечает слабому существованию; второй — сильному существованию; третий — слабой единственности; четвертый — сильной единственности. Таким образом, утверждение "для СДУ ... имеем $\boxed{+|-|+|-}$" понимается следующим образом: "для СДУ ... существует решение, не существует сильного решения, имеет место слабая единственность, и нет сильной единственности".

Сначала приведем пример СДУ, не имеющего решения.

Пример 1.28 (нет решения). *Для СДУ*

$$dX_t = -\operatorname{sgn} X_t dt, \quad X_0 = 0, \tag{1.11}$$

где

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x \leqslant 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

имеем $\boxed{-|-|+|+}$.

`Доказательство`. Предположим, что существует решение (X, B). Тогда почти все траектории X удовлетворяют интегральному уравнению

$$f(t) = -\int_0^t \operatorname{sgn} f(s) ds, \quad t \geqslant 0. \tag{1.13}$$

Предположим, что это уравнение обладает решением f. Допустим, что существуют $a > 0$, $t > 0$ такие, что $f(t) = a$. Положим $v = \inf\{t \geqslant 0 : f(t) = a\}$, $u = \sup\{t \leqslant v : f(t) = 0\}$. Используя (1.13), получаем $a = f(v) - f(u) = -(v - u)$. Полученное противоречие показывает, что $f \leqslant 0$. Аналогично доказываем, что $f \geqslant 0$. Итак, $f \equiv 0$, но тогда это не решение (1.13). В результате, уравнение (1.13), а значит, и уравнение (1.11), не имеют решения. □

Следующий пример — СДУ с той же характеристической диаграммой и $\sigma \equiv 1$.

Пример 1.29 (нет решения). *Для СДУ*

$$dX_t = -\frac{1}{2X_t} I(X_t \neq 0) dt + dB_t, \quad X_0 = 0 \tag{1.14}$$

имеем $\boxed{-|-|+|+}$.

`Доказательство`. Предположим, что (1.14) обладает решением (X, B). Тогда

$$X_t = -\int_0^t \frac{1}{2X_s} I(X_s \neq 0) ds + B_t, \quad t \geqslant 0.$$

По формуле Ито,

$$X_t^2 = -\int_0^t 2X_s \frac{1}{2X_s} I(X_s \neq 0)ds + \int_0^t 2X_s dB_s + t$$
$$= \int_0^t I(X_s = 0)ds + \int_0^t 2X_s dB_s, \quad t \geqslant 0.$$

Процесс X является непрерывным семимартингалом с квадратической вариацией $\langle X\rangle_t = t$. По формуле для времен пребывания,

$$\int_0^t I(X_s = 0)ds = \int_{\mathbb{R}} I(x = 0) L_t^x(X)dx = 0, \quad t \geqslant 0,$$

где $L_t^x(X)$ обозначает локальное время процесса X, проведенное в точке x до момента t. Следовательно, X^2 — неотрицательный локальный мартингал, а значит, супермартингал. Поскольку $X^2 \geqslant 0$ и $X_0^2 = 0$, заключаем, что $X^2 = 0$ п.н. Но тогда (X, B) не является решением (1.14). □

Перейдем теперь к примерам СДУ, обладающих решением, но не имеющих сильного решения.

Пример 1.30 (нет сильного решения; Танака). *Для СДУ*

$$dX_t = \operatorname{sgn} X_t dB_t, \quad X_0 = 0 \tag{1.15}$$

(*точное определение* sgn *дается равенством* (1.12)) *имеем* $\boxed{+|-|+|-}$.

`Доказательство`. Пусть W — броуновское движение на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Рассмотрим

$$X_t = W_t, \quad B_t = \int_0^t \operatorname{sgn} W_s dW_s, \quad t \geqslant 0$$

и положим $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$ ($(\mathcal{F}_t^W)$ обозначает натуральную фильтрацию W). Очевидно, (X, B) является решением (1.15) на $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathsf{P}\big)$.

Если (X, B) — решение (1.15) на фильтрованном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathsf{P}\big)$, то X является непрерывным $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом с $\langle X\rangle_t = t$. Из характеризационной теоремы

Леви вытекает, что X является броуновским движением. Это влечет слабую единственность.

Если (X, B) — решение (1.15), то

$$B_t = \int_0^t \operatorname{sgn} X_s dX_s, \quad t \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_t^{|X|}$ (см. [63; Ch. VI, Cor. 2.2]). Итак, не существует сильного решения.

Если (X, B) — решение (1.15), то $(-X, B)$ — также решение. Итак, нет сильной единственности. $\square$

Следующий пример — СДУ с той же характеристической диаграммой, $b = 0$ и непрерывным коэффициентом σ.

Пример 1.31 (нет сильного решения; Барлоу). *Существует непрерывная ограниченная функция* $\sigma : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *такая, что для СДУ*

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0$$

имеем $\boxed{+|-|+|-}$.

Доказательство можно найти в [38].

Следующий пример — СДУ с такой же характеристической диаграммой и $\sigma \equiv 1$. Коэффициент сноса в этом уравнении зависит от прошлого.

Пример 1.32 (нет сильного решения; Цирельсон). *Существует ограниченный предсказуемый функционал* $b : C(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *такой, что для СДУ*

$$dX_t = b_t(X)dt + dB_t, \quad X_0 = x_0$$

имеем $\boxed{+|-|+|-}$.

Доказательство можно найти в [31], [4; Гл. IV, Прим. 4.1], [63; Ch. IX, Prop. 3.6] или [64; Ch. V.3].

`Замечание`. Пусть B — броуновское движение на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Положим $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$. Тогда уравнения примеров 1.30–1.32 не имеют решения на $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathsf{P}\big)$ с броуновским движением B. Действительно, если (X, B) — решение, то процесс X должен быть согласован с $(\mathcal{F}_t)$, т.е. решение (X, B) является сильным.

Перейдем теперь к примерам СДУ, для которых нет слабой единственности.

Пример 1.33 (нет слабой единственности). *Для СДУ*

$$dX_t = I(X_t \neq 0)dB_t, \quad X_0 = 0 \tag{1.16}$$

имеем $\boxed{+}\boxed{+}\boxed{-}\boxed{-}$.

`Доказательство`. Достаточно заметить, что (B, B) и $(0, B)$ — решения (1.16) на $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathsf{P}\big)$, если B является $(\mathcal{F}_t)$-броуновским движением. $\square$

`Замечание`. Пусть B — броуновское движение на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а η — случайная величина, независимая с B, такая, что $\mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = 1/2$. Рассмотрим

$$X_t(\omega) = \begin{cases} B_t(\omega), & \text{если } \eta(\omega) = 1, \\ 0, & \text{если } \eta(\omega) = -1 \end{cases}$$

и возьмем $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$. Тогда (X, B) — решение (1.16) на $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathsf{P}\big)$, не являющееся сильным. Действительно, для любого $t > 0$ величина η не измерима относительно $\overline{\mathcal{F}}_t^B$. Поскольку множества $\{\eta = -1\}$ и $\{X_t = 0\}$ неразличимы, X_t не измерима относительно $\overline{\mathcal{F}}_t^B$.

Следующий пример — СДУ с той же характеристической диаграммой, $b = 0$ и непрерывным коэффициентом σ.

Пример 1.34 (нет слабой единственности; Гирсанов). *Пусть* $0 < \alpha < 1/2$. *Тогда для СДУ*

$$dX_t = |X_t|^{\alpha} dB_t, \quad X_0 = 0 \tag{1.17}$$

имеем $\boxed{+}\boxed{+}\boxed{-}\boxed{-}$.

Доказательство. Пусть W — броуновское движение, выходящее из нуля на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и

$$\begin{aligned} A_t &= \int_0^t |W_s|^{-2\alpha} ds, \quad t \geqslant 0, \\ \tau_t &= \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\}, \quad t \geqslant 0, \\ X_t &= W_{\tau_t}, \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Формула для времен пребывания и предложение A.6 показывают, что траектории A п.н. непрерывны и конечны. Из предложения A.9 следует, что $A_t \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ п.н. Поэтому траектории τ п.н. конечны, непрерывны и строго возрастают. Из предложения A.16 следует, что X является непрерывным $(\mathcal{F}^W_{\tau_t})$-локальным мартингалом с $\langle X \rangle_t = \tau_t$. Используя формулу замены времени (см. предложение A.18), можем записать

$$\tau_t = \int_0^{\tau_t} |W_s|^{2\alpha} dA_s = \int_0^{A_{\tau_t}} |W_{\tau_s}|^{2\alpha} ds = \int_0^t |X_s|^{2\alpha} ds, \quad t \geqslant 0.$$

(Здесь использовано равенство $A_{\tau_t} = t$, вытекающее из непрерывности A и свойства $A_t \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ п.н.) Поэтому процесс

$$B_t = \int_0^t |X_s|^{-\alpha} dX_s, \quad t \geqslant 0$$

является непрерывным $(\mathcal{F}^W_{\tau_t})$-локальным мартингалом с $\langle B \rangle_t = t$. Согласно характеризационной теореме Леви, B является $(\mathcal{F}^W_{\tau_t})$-броуновским движением. Итак, (X, B) — решение (1.17).

Теперь все требуемые утверждения вытекают из того факта, что $(0, B)$ — другое решение (1.17). $\square$

Следующий пример — СДУ с той же характеристической диаграммой и $\sigma \equiv 1$.

Пример 1.35. (нет слабой единственности; СДУ для процессов Бесселя). *Рассмотрим СДУ*

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2X_t} I(X_t \neq 0)dt + dB_t, \quad X_0 = x_0 \tag{1.18}$$

с $\delta > 1$.

(i) *Если* $\delta \geqslant 2$ *и* $x_0 \neq 0$, *то имеем* $\boxed{+}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{+}$.

(ii) *Если* $1 < \delta < 2$ *или* $x_0 = 0$, *то имеем* $\boxed{+}\boxed{+}\boxed{-}\boxed{-}$.

Доказательство. **(i)** Без ограничения общности, можем считать, что $x_0 > 0$. Согласно предложению A.21, существует решение (X, B) уравнения (1.18) (X является δ-мерным процессом Бесселя). Кроме того, процесс X положителен.

Докажем сильную единственность. Предположим, что существует другое решение $(\widetilde{X}, B)$. По формуле Ито,

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_t^2 &= x_0^2 + \int_0^t (\delta - 1) I(\widetilde{X}_s \neq 0)ds + 2\int_0^t \widetilde{X}_s dB_s + t \\ &= x_0^2 + \delta t - \int_0^t (\delta - 1) I(\widetilde{X}_s = 0)ds + 2\int_0^t \sqrt{|\widetilde{X}_s^2|}d\widetilde{W}_s, \quad t \geqslant 0,\end{aligned}$$

где

$$\widetilde{W}_t = \int_0^t \operatorname{sgn} \widetilde{X}_s dB_s, \quad t \geqslant 0.$$

По формуле для времен пребывания,

$$\int_0^t I(\widetilde{X}_s = 0)ds = \int_0^t I(\widetilde{X}_s = 0)d\langle \widetilde{X} \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} I(x = 0)L_t^x(\widetilde{X})dx = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Следовательно, пара $(\widetilde{X}^2, \widetilde{W})$ является решением СДУ

$$dX_t = \delta dt + 2\sqrt{|X_t|}dB_t, \quad X_0 = x_0^2. \tag{1.19}$$

Аналогично, пара (X_t^2, W), где X — процесс Бесселя и

$$W_t = \int_0^t \operatorname{sgn} X_s dB_s, \quad t \geqslant 0,$$

является решением (1.19). Предложение 1.22 показывает, что для (1.19) имеет место сильная единственность, а предложение 1.15 гарантирует слабую единственность для этого уравнения. Следовательно, $\widetilde{X}^2$ и X^2 совпадают по распределению. Известно (см. предложение A.20), что процесс Бесселя размерности $\delta \geqslant 2$, выходящий из строго положительной точки, строго положителен. Итак, $\mathsf{P}(\forall t \geqslant 0,\ X_t^2 > 0) = 1$, откуда $\mathsf{P}(\forall t \geqslant 0,\ \widetilde{X}_t^2 > 0) = 1$. Но $\widetilde{X}$ имеет непрерывные траектории и $\widetilde{X}_0 = x_0 > 0$. Следовательно, $\widetilde{X}$ строго положителен. Отсюда $\widetilde{W} = W = B$, так что $(\widetilde{X}^2, B)$ и (X^2, B) — решения (1.19). Из сильной единственности для этого уравнения вытекает, что $\widetilde{X}^2 = X^2$, что в сочетании с положительностью $\widetilde{X}$ и X влечет равенство $\widetilde{X} = X$ п.н.

Итак, мы доказали слабое существование и сильную единственность для (1.18). Теперь достаточно применить предложение 1.15.

(ii) Предположим сначала, что $x_0 = 0$. Рассуждения выше показывают, что существует сильное решение (X, B) уравнения (1.18) с положительным процессом X.

По теореме 1.14 (i), существует измеримое отображение $\Phi : C(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$ такое, что процесс $\Phi(B)$ согласован с $\bigl(\overline{\mathcal{F}}_t^B\bigr)$ и $X = \Phi(B)$ п.н. Для любого $t \geqslant 0$ имеем

$$\Phi_t(B) = \int_0^t \frac{\delta - 1}{2\Phi_s(B)} I\bigl(\Phi_s(B) \neq 0\bigr) ds + B_t \quad \text{п.н.}$$

Процесс $\widetilde{B} = -B$ является броуновским движением. Поэтому для любого $t \geqslant 0$

$$-\Phi_t(-B) = \int_0^t \frac{\delta - 1}{-2\Phi_s(-B)} I\bigl(-\Phi_s(-B) \neq 0\bigr) ds + B_t \quad \text{п.н.}$$

Следовательно, пара $(\widetilde{X}, B)$, где $\widetilde{X} = -\Phi(-B)$, является (сильным) решением (1.18). Очевидно, X положителен, в то время как $\widetilde{X}$ отрицателен. Поэтому X и $\widetilde{X}$ имеют п.н. различные траектории и различные распределения. Отсюда вытекает, что для (1.18) нет ни слабой, ни сильной единственности.

Теперь предположим, что $1 < \delta < 2$. Без ограничения общности, $x_0 > 0$. Пусть (X, B) — решение (1.18), где X — процесс Бесселя размерности δ. Известно, что $\mathsf{P}(\exists t \geqslant 0 : X_t = 0) = 1$ (см. предложение A.20), так что момент остановки $\tau = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = 0\}$ конечен п.н. Положим

$$\widetilde{B}_t = \int_0^t \big(I(s \leqslant \tau) - I(s > \tau)\big) dB_s,$$

$$\widetilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \Phi_t(B(\omega)), & \text{если } t \leqslant \tau(\omega), \\ -\Phi_t(\widetilde{B}(\omega)), & \text{если } t > \tau(\omega), \end{cases}$$

где $\Phi : C(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$ — измеримый функционал такой, что $X = \Phi(B)$ п.н. Аналогично тому, как это делалось выше, можно проверить, что (X, B) и $(\widetilde{X}, B)$ — два различных решения (1.18). □

Следующий достаточно удивительный пример имеет многомерную природу.

Пример 1.36 (нет слабой единственности; Надирашвили). *Пусть $n \geqslant 3$. Существует функция $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ такая, что*

$$\varepsilon \|\lambda\| \leqslant \|\sigma(x)\lambda\| \leqslant C\|\lambda\|, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}^n$$

с некоторыми константами $C > 0$, $\varepsilon > 0$, и при этом для СДУ

$$dX_t^i = \sum_{j=1}^n \sigma^{ij}(X_t) dB_t^j, \quad X_0 = x_0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

имеем $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline + & & - & - \\ \hline \end{array}$.

Доказательство можно найти в [61] или [65].

Приведем наконец еще один пример. Его характеристическая диаграмма отлична от всех приведенных выше.

Пример 1.37 (нет сильного решения и единственности). *Для СДУ*

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = 0 \tag{1.20}$$

с

$$\sigma(t,x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{если } \ t \leqslant 1, \\ I(x \neq 1) \operatorname{sgn} x, & \text{если } \ t > 1 \end{cases}$$

(*точное определение* sgn *дается равенством* (1.12)) *имеем* $\boxed{+|-|-|-}$.

Доказательство. Если W — броуновское движение, то пара

$$X_t = W_t, \quad B_t = \int_0^t \operatorname{sgn} W_s dW_s, \quad t \geqslant 0 \tag{1.21}$$

является решением (1.20).

Пусть (X, B) — решение, определяемое равенством (1.21). Положим $\tau = \inf\{t \geqslant 1 : X_t = 1\}$, $\widetilde{X}_t = X_{t\wedge\tau}$. Тогда $(\widetilde{X}, B)$ — другое решение. Итак, нет ни слабой, ни сильной единственности.

Если (X, B) — решение (1.21), то

$$X_t = \int_0^t \operatorname{sgn} X_s dB_s, \quad t \leqslant 1.$$

Аргументы, приведенные при доказательстве примера 1.30, показывают, что решение (X, B) не является сильным. □

Замечание. СДУ

$$dX_t = I(X_t \neq 1) \operatorname{sgn} X_t dB_t, \quad X_0 = 0$$

является однородным уравнением с той же характеристической диаграммой, что и в примере 1.37. Однако доказательство того, что это уравнение не имеет сильного решения, сложнее, чем для СДУ (1.20).

Приведем одно применение описанных выше результатов. Для уравнения (1) каждое из следующих свойств:

- слабое существование,
- сильное существование,
- слабая единственность,
- сильная единственность

может выполняться или не выполняться. Итак, имеется 16 ($= 2^4$) мыслимых комбинаций. Некоторые из них невозможны (к примеру, если есть сильная единственность, то должна быть и слабая единственность). Для каждой из этих комбинаций предложение 1.15, теорема 1.16а и примеры 1.28–1.37 позволяют либо дать пример соответствующего СДУ, либо доказать, что эта комбинация не реализуется. Оказывается, что реализуется лишь 5 комбинаций (см. табл. 1.1).

Слабое сущест.	**Сильное сущест.**	**Слабая единст.**	**Сильная единст.**	**Возможно/Невозможно**
$-$	$-$	$-$	$-$	невозможно, очевидно
$-$	$-$	$-$	$+$	невозможно, очевидно
$-$	$-$	$+$	$-$	невозможно, очевидно
$-$	$-$	$+$	$+$	возможно, примеры 1.28, 1.29
$-$	$+$	$-$	$-$	невозможно, очевидно
$-$	$+$	$-$	$+$	невозможно, очевидно
$-$	$+$	$+$	$-$	невозможно, очевидно
$-$	$+$	$+$	$+$	невозможно, очевидно
$+$	$-$	$-$	$-$	возможно, пример 1.37
$+$	$-$	$-$	$+$	невозможно, предложение 1.15
$+$	$-$	$+$	$-$	возможно, примеры 1.30–1.32
$+$	$-$	$+$	$+$	невозможно, предложение 1.15
$+$	$+$	$-$	$-$	возможно, примеры 1.33–1.35
$+$	$+$	$-$	$+$	невозможно, предложение 1.15
$+$	$+$	$+$	$-$	невозможно, теорема 1.16a
$+$	$+$	$+$	$+$	возможно, очевидно

Табл. 1.1. Возможные и невозможные комбинации различных типов существования и единственности. К примеру, комбинация " $+ - +-$ " в строке 11 соответствует СДУ, для которого существует решение, нет сильного решения, есть слабая единственность и нет сильной единственности. Таблица показывает, что такие уравнения даются примерами 1.30–1.32.

Глава 2

Изолированные особые точки и односторонняя классификация

На протяжении этой главы будем рассматривать СДУ (2) и предполагать, что b и σ измеримы, причем $\sigma(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Через X будем обозначать канонический процесс на $C(\mathbb{R}_+)$ или $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ (см. определение 1.9), а через $(\mathcal{F}_t)$ — каноническую фильтрацию. Решения, рассматриваемые в параграфах 2.1, 2.2, за исключением теоремы 2.6, являются глобальными (т.е. решениями в смысле определения 1.7). Решения, рассматриваемые в теореме 2.6 и параграфах 2.3, 2.4, являются локальными (т.е. решениями в смысле определений 1.10, 1.12).

§ 2.1 Изолированные особые точки: определение

Прежде всего напомним известное

Определение 2.1. **(i)** Измеримая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *локально интегрируема в точке* $d \in \mathbb{R}$, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_{d-\delta}^{d+\delta} |f(x)|dx < \infty.$$

Будем использовать обозначение: $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(d)$.

(ii) Измеримая функция f *локально интегрируема на множестве* $D \subseteq \mathbb{R}$, если f локально интегрируема в каждой точке $d \in D$. Будем использовать обозначение: $f \in L^1_{\text{loc}}(D)$.

Дадим теперь ключевое

Определение 2.2. **(i)** Точку $d \in \mathbb{R}$ назовем *особой точкой* для СДУ (2), если

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \notin L^1_{\text{loc}}(d).$$

Точку, не являющуюся особой, назовем *неособой.*

(ii) Точку $d \in \mathbb{R}$ назовем *изолированной особой точкой* для (2), если d — особая точка и существует проколотая окрестность d, состоящая из неособых точек.

Следующие 5 утверждений имеют целью показать, что особые точки в смысле определения 2.2 действительно являются "особыми".

Предложение 2.3. *Предположим, что* $|b|/\sigma^2 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ *и* $1/\sigma^2 \notin L^1_{\text{loc}}(d)$. *Тогда не существует решения* (2) *с* $X_0 = d$.

Доказательство можно найти в [47; Th. 4.35].

Теорема 2.4. *Пусть* $I \subseteq \mathbb{R}$ *— открытый интервал. Предположим, что* $|b|/\sigma^2 \notin L^1_{\text{loc}}(x)$ *для любого* $x \in I$. *Тогда для любого* $x_0 \in I$ *не существует решения* (2).

Доказательство. (Ср. с [43].) Допустим, что имеется решение P. По формуле для времен пребывания и по определению решения имеем

$$\int_0^t |b(X_s)|ds = \int_0^t \frac{|b(X_s)|}{\sigma^2(X_s)} d\langle X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)} L^x_t(X)dx < \infty \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}, \qquad (2.1)$$

где $L^y_t(X)$ обозначает локальное время процесса X, проведенное в точке y к моменту t. Поскольку $L^y_t(X)$ непрерывно справа по y (см. предложение A.6), заключаем, что

$$\mathsf{P}(\forall t \geqslant 0,\ \forall x \in I,\ L^x_t(X) = 0) = 1.$$

Итак, для момента остановки $S = 1 \wedge \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin I\}$ имеем

$$\begin{aligned} S &= \int_0^S 1 ds = \int_0^S \sigma^{-2}(X_s) d\langle X\rangle_s \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sigma^{-2}(x) L_S^x(X) dx = \int_I \sigma^{-2}(x) L_S^x(X) dx = 0 \quad \mathsf{P}\text{-п.н.} \end{aligned}$$

(Здесь мы воспользовались тем фактом, что $L_S^x(X) = 0$ для $x \notin I$; он вытекает из предложения A.5.) Это приводит к противоречию, поскольку $S > 0$. □

Замечание. Из приведенного доказательства видно, что решение не может войти в открытый интервал, состоящий из особых точек.

Теорема 2.5a. *Предположим, что d — особая точка для* (2) *и* P — *решение* (2). *Тогда для любого $t \geqslant 0$ имеем*

$$L_t^d(X) = L_t^{d-}(X) = 0 \quad \mathsf{P}\text{-п.н.},$$

где $L_t^{d-}(X) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} L_t^{d-\varepsilon}(X)$ (по поводу существования этого предела, см. [63; Ch. VI, Th. 1.7]).

Доказательство. Поскольку точка d — особая, то

$$\forall \varepsilon > 0, \ \int_d^{d+\varepsilon} \frac{1 + |b(x)|}{\sigma^2(x)} dx = \infty \tag{2.2}$$

или

$$\forall \varepsilon > 0, \ \int_{d-\varepsilon}^{d} \frac{1 + |b(x)|}{\sigma^2(x)} dx = \infty. \tag{2.3}$$

Если выполнено (2.2), то (2.1), вместе с непрерывностью справа $L_t^y(X)$ по y, влечет, что для любого $t \geqslant 0$ $L_t^d(X) = 0$ P-п.н. Если же выполняется (2.3), то для любого $t \geqslant 0$ $L_t^{d-}(X) = 0$ P-п.н.

Положим

$$B_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma(X_s)} dM_s, \quad t \geqslant 0,$$

где M определяется равенством (1.1). Тогда

$$\int_0^t I(X_s = d)dX_s = \int_0^t I(X_s = d)b(X_s)ds + \int_0^t I(X_s = d)\sigma(X_s)dB_s$$
$$= \int_0^t I(X_s = d)b(X_s)ds + N_t, \quad t \geqslant 0,$$

где $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$. По формуле для времен пребывания,

$$\int_0^t I(X_s = d)b(X_s)ds = \int_0^t \frac{I(X_s = d)b(X_s)}{\sigma^2(X_s)}d\langle X\rangle_s$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{I(x = d)b(x)}{\sigma^2(x)}L_t^x(X)dx = 0 \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

Аналогично,

$$\langle N\rangle_t = \int_0^t I(X_s = d)\sigma^2(X_s)ds = 0 \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

Поэтому

$$\int_0^t I(X_s = d)dX_s = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Используя равенство (A.1), получаем

$$L_t^d(X) = L_t^{d-}(X) \quad \mathsf{P}\text{-п.н.} \tag{2.4}$$

Выше было показано, что $L_t^d(X) = 0$ или $L_t^{d-}(X) = 0$. Это вместе с (2.4) приводит к требуемому заключению. □

Теорема 2.5б. *Пусть* d *— неособая точка для* (2) *и* P *— решение* (2). *Предположим, что* $\mathsf{P}(T_d < \infty) > 0$, *где* $T_d = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = d\}$. *Тогда для любого* $t \geqslant 0$ *имеем на множестве* $\{t > T_d\}$

$$L_t^d(X) > 0,\ L_t^{d-}(X) > 0 \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

Это утверждение будет доказано в параграфе 2.4.

Теоремы 2.5а и 2.5б показывают, что особые точки уравнения (2) — это те и только те точки, в которых локальное время решения обращается в нуль.

Опишем теперь качественное различие между особыми и неособыми точками. Рассмотрим уравнение (2) с $x_0 = 0$. Если выполнены условия предложения 1.27 (в этом случае нуль — неособая точка), то поведение решения регулярно в следующем смысле:

- существует решение до $S-$, где S — момент взрыва, т.е. $S = \sup_n \inf\{t \geqslant 0 : |X_t| = n\}$, где X обозначает канонический процесс на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$;
- оно единственно;
- оно является знакопеременным, т.е.

$$\mathsf{P}(\forall \varepsilon > 0\ \exists t < \varepsilon : X_t > 0) = 1, \quad \mathsf{P}(\forall \varepsilon > 0\ \exists t < \varepsilon : X_t < 0) = 1$$

(эти свойства вытекают из построения решения, которое было описано при доказательстве предложения 1.27). Утверждение ниже, вытекающее из результатов параграфа 3.1, показывает, что по крайней мере одно из описанных выше трех условий нарушается, если нуль — изолированная особая точка.

Теорема 2.6. *Предположим, что*

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad \frac{1+|b|}{\sigma^2} \notin L^1_{\mathrm{loc}}(0)$$

и $x_0 = 0$. *Положим* $S = \sup_n \inf\{t \geqslant 0 : |X_t| = n\}$. *Тогда возможны лишь 4 ситуации:*

1. *Не существует решения до* $S-$.
2. *Существует единственное решение до* $S-$ *и оно положительно.*
3. *Существует единственное решение до* $S-$ *и оно отрицательно.*
4. *Существует как положительное, так и отрицательное решение до* $S-$. (*В этом случае могут также существовать знакопеременные решения.*)

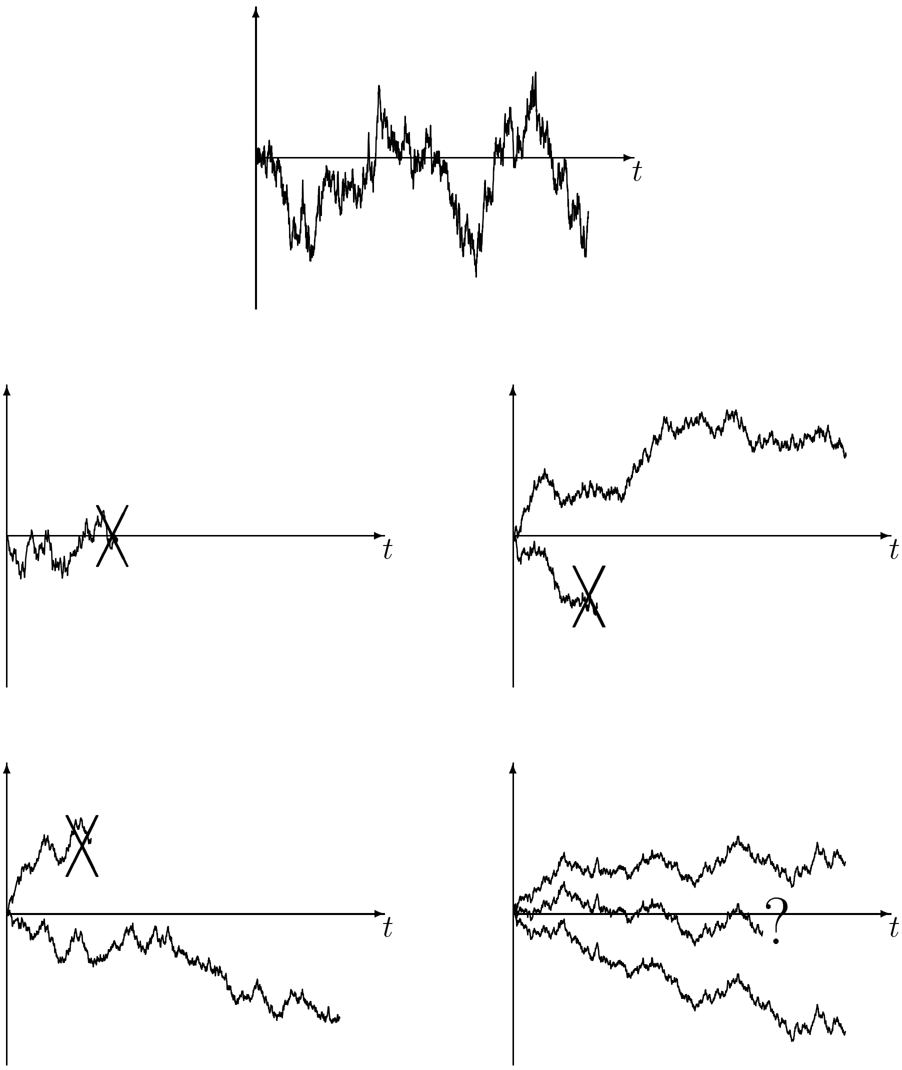


Рис. 2.1. Качественное различие между особыми и неособыми точками. Верхний рисунок показывает "типичное" поведение решения в окрестности неособой точки. Остальные 4 рисунка иллюстрируют 4 возможных типа поведения решения в окрестности особой точки. К примеру, символ "╳" на нижнем левом рисунке означает, что не существует положительного решения. Символ "?" на нижнем правом рисунке означает, что знакопеременные решения могут существовать или не существовать.

§ 2.2 Изолированные особые точки: примеры

Примером СДУ с изолированной особой точкой служит уравнение примера 1.29. Для этого уравнения нет решения.

Другой пример СДУ с изолированной особой точкой — уравнение для процесса Бесселя, рассмотренное в примере 1.35.

Приведем еще один пример.

Пример 2.7. (СДУ для геометрического броуновского движения). *Рассмотрим СДУ*

$$dX_t = \mu X_t dt + (X_t + I(X_t = 0))dB_t, \quad X_0 = x_0 \tag{2.5}$$

с $\mu \in \mathbb{R}$*.*

(i) *Если* $x_0 > 0$*, то существует единственное решение* P*. Оно строго положительно. Если* $\mu > 1/2$*, то* $\mathsf{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty) = 1$*; если* $\mu < 1/2$*, то* $\mathsf{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = 0) = 1$*.*

(ii) *Если* $x_0 = 0$*, то решения не существует.*

`Доказательство`. Если P — решение (2.5), то для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^t I(X_s = 0)ds = \int_0^t \frac{I(X_s = 0)}{\sigma^2(X_s)} d\langle X\rangle_s$$
$$= \int_{\mathbb{R}} I(x = 0) L_t^x(X)dx = 0 \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

Следовательно, P также является решением СДУ

$$dX_t = \mu X_t dt + X_t dB_t, \quad X_0 = x_0. \tag{2.6}$$

Предложения 1.15 и 1.19 показывают, что для (2.6) имеет место слабая единственность. Применяя формулу Ито и предложение 1.6, получаем, что решение (2.6) имеет вид

$$\mathsf{Q} = \operatorname{Law}\bigl(x_0 e^{B_t + (\mu - 1/2)t};\ t \geqslant 0\bigr),$$

где B — броуновское движение, выходящее из нуля. Очевидно, если $x_0 \neq 0$, то Q также служит решением уравнения (2.5); если $x_0 = 0$, то Q не является решением (2.5). Свойства решения в случае $x_0 > 0$ вытекают из усиленного закона больших чисел для броуновского движения: $\frac{B_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} 0$. □

Ситуацию в примерах 1.29, 1.35 и 2.7 можно неформально описать следующим образом. В примере 1.29 снос отрицателен справа от нуля и положителен слева от нуля. Снос является настолько сильным вблизи нуля, что не выпускает решение из этой точки. С другой стороны, тождественный нуль не является решением.

В примере 1.35 снос положителен справа от нуля и отрицателен слева от нуля. Снос является настолько сильным вблизи нуля, что существует как положительное, так и отрицательное решение. Если $1 < \delta < 2$, то решение, выходящее из точки $x_0 \neq 0$, достигает нуля п.н. После входа в нуль оно может быть продолжено как в положительном, так и в отрицательном направлении. Это приводит к появлению разных решений. Если же $\delta \geqslant 2$, то решение, выходящее из точки $x_0 \neq 0$ не может достичь нуля. Поскольку эта "плохая" точка не достигается, решение единственно.

В примере 2.7 коэффициенты сноса и диффузии принимают малые значения вблизи нуля, так что решение, выходящее из $x_0 \neq 0$, не достигает нуля. Решение с $x_0 = 0$ не может покинуть нуль, но тождественный нуль не является решением.

Из приведенных примеров видно, что небольшое изменение параметров уравнения может привести к существенным качественным изменениям в поведении решения.

§ 2.3 Односторонняя классификация: результаты

На протяжении этого параграфа будем предполагать, что нуль — изолированная особая точка. Тогда существует $a > 0$ такое, что

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,a]). \tag{2.7}$$

Заметим, что интеграл

$$\int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\sigma^2(x)}dx$$

может сходиться. В этом случае соответствующий интеграл должен расходиться в левой полуокрестности нуля.

Будем использовать функции

$$\rho(x) = \exp\biggl(\int_x^a \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}dy\biggr), \quad x \in (0,a], \tag{2.8}$$

$$s(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \rho(y)dy, & \text{если } \displaystyle\int_0^a \rho(y)dy < \infty, \\ \displaystyle -\int_x^a \rho(y)dy, & \text{если } \displaystyle\int_0^a \rho(y)dy = \infty. \end{cases} \tag{2.9}$$

Функция s является версией неопределенного интеграла $\int^x \rho(y)dy$. Если $\int_0^a \rho(y)dy < \infty$, выбираем версию, обращающуюся в нуль в нуле; иначе выбираем версию, обращающуюся в нуль в точке a. Будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} T_a &= \inf\{t \geqslant 0 : X_t = a\}, \\ \overline{T}_a &= \sup_n \inf\{t \geqslant 0 : |X_t - a| \leqslant 1/n\}, \\ T_{a,c} &= T_a \wedge T_c, \\ \overline{T}_{a,c} &= \overline{T}_a \wedge \overline{T}_c \end{aligned} \tag{2.10}$$

с обычным соглашением $\inf \varnothing = +\infty$ (здесь $a, c \in \mathbb{R}$). Заметим, что $\overline{T}_a$ может не равняться T_a, поскольку может оказаться, что $X = \pi$ в момент $\overline{T}_a$ (тогда $T_a = \infty$).

Будем также рассматривать стохастические интервалы

$$\llbracket S,T\rrbracket=\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ : S(\omega)\leqslant t\leqslant T(\omega)\},$$
$$\rrbracket S,T\rrbracket=\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ : S(\omega)< t\leqslant T(\omega)\},$$
$$\llbracket S,T\llbracket=\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ : S(\omega)\leqslant t< T(\omega)\},$$
$$\rrbracket S,T\llbracket=\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ : S(\omega)< t< T(\omega)\},$$

где S,T — моменты остановки (при этом необязательно $S\leqslant T$).

Теорема 2.8а. *Предположим, что*

$$\int_0^a\frac{1+|b(x)|}{\sigma^2(x)}dx<\infty.$$

Если $x_0\in[0,a]$, *то существует единственное решение до* $T_{0,a}$. *При этом* $\mathsf{E}_\mathsf{P}T_{0,a}<\infty$ *и* $\mathsf{P}(X_{T_{0,a}}=0)>0$.

Если выполнены условия теоремы 2.8а, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 0.

Теорема 2.8б. *Предположим, что*

$$\int_0^a\rho(x)dx<\infty,\quad\int_0^a\frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx<\infty,\quad\int_0^a\frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)}dx=\infty.$$

Если $x_0\in[0,a]$, *то существует положительное решение* P *до* T_a, *и такое решение единственно. При этом* $\mathsf{E}_\mathsf{P}T_a<\infty$ *и* $\mathsf{P}(\exists t\leqslant T_a : X_t=0)>0$.

Если выполнены условия теоремы 2.8б, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 2.

Теорема 2.8в. *Предположим, что*

$$\int_0^a\rho(x)dx<\infty,\quad\int_0^a\frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx=\infty,\quad\int_0^a\frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}s(x)dx<\infty.$$

(i) *Для любого решения* (P,S) *имеем* $X\leqslant 0$ *на* $\llbracket T_0,S\rrbracket$ P-*п.н.* (*т.е. для любого* $t\geqslant 0$ *имеем* $X_t\leqslant 0$ P-*п.н. на* $\{T_0\leqslant t\leqslant S\}$).

(ii) *Если* $x_0 \in [0,a]$, *то существует единственное решение* P *до* $T_{0,a}$. *При этом* $\mathsf{E}_{\mathsf{P}} T_{0,a} < \infty$ *и* $\mathsf{P}(X_{T_{0,a}} = 0) > 0$.

Если выполнены условия теоремы 2.8в, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 1.

Замечание. Из утверждения (i) вытекает, что если $x_0 \leqslant 0$, то любое решение (P, S) отрицательно.

Теорема 2.8г. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} s(x)dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{s(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)} dx < \infty.$$

(i) *Если* $x_0 > 0$, *то любое решение* (P, S) *строго положительно.*

(ii) *Если* $x_0 \leqslant 0$, *то любое решение* (P, S) *отрицательно.*

(iii) *Если* $x_0 \in (0,a)$, *то существует единственное решение* P *до* $\overline{T}_{0,a}-$. *При этом* $\mathsf{E}_{\mathsf{P}} \overline{T}_{0,a} < \infty$ *и* $\mathsf{P}(\lim_{t \uparrow \overline{T}_{0,a}} X_t = 0) > 0$.

Если выполнены условия теоремы 2.8г, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 6.

Замечания. (i) Решение P определено до $\overline{T}_{0,a}-$ (а не до $T_{0,a}-$), поскольку момент остановки $T_{0,a}$ не является предсказуемым. Причина заключается в том, что может оказаться, что $X = \pi$ в момент $T_{0,a}$ (и тогда $T_{0,a} = \infty$). С другой стороны, момент $\overline{T}_{0,a}$, очевидно, предсказуем.

(ii) При условии (2.7), для $x_0 \in (0,a)$ всегда существует решение до $\overline{T}_{0,a}-$ (не только для типа 6).

Теорема 2.8д. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{s(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)} dx = \infty.$$

(i) *Если* $x_0 > 0$, *то любое решение* (P, S) *строго положительно.*

(ii) *Если* $x_0 \leqslant 0$, *то любое решение* (P, S) *отрицательно.*

(iii) *Если* $x_0 \in (0, a]$, *то существует единственное решение* P *до* T_a. *При этом* $\mathsf{P}(T_a = \infty) > 0$ *и* $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ P*-п.н. на* $\{T_a = \infty\}$.

Если выполнены условия теоремы 2.8д, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 4.

Теорема 2.8е. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} |s(x)|dx < \infty.$$

(i) *Если* $x_0 > 0$, *то любое решение* (P, S) *строго положительно.*

(ii) *Если* $x_0 \in (0, a]$, *то существует единственное решение* P *до* T_a. *При этом* $\mathsf{E}_\mathsf{P} T_a < \infty$.

(iii) *Если* $x_0 = 0$, *то существует положительное решение* P *до* T_a, *и такое решение единственно. При этом* $\mathsf{E}_\mathsf{P} T_a < \infty$ *и* $X > 0$ *на* $]\!]0, T_a]\!]$ P*-п.н.*

Если выполнены условия теоремы 2.8е, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 3.

Теорема 2.8ж. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} |s(x)|dx = \infty.$$

(i) *Если* $x_0 > 0$, *то любое решение* (P, S) *строго положительно.*

(ii) *Если* $x_0 \leqslant 0$, *то любое решение* (P, S) *отрицательно.*

(iii) *Если* $x_0 \in (0, a]$, *то существует единственное решение* P *до* T_a. *При этом* $T_a < \infty$ P*-п.н.*

Если выполнены условия теоремы 2.8ж, то будем говорить, что нуль имеет *правый тип* 5.

Рис. 2.2 иллюстрирует одностороннюю классификацию изолированных особых точек. Заметим, что условия интегрируемости, показанные на этом рисунке, не всегда имеют тот же вид, что условия теорем 2.8а–2.8ж. Тем не менее, они эквивалентны. К примеру,

$$\int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\sigma^2(x)}dx < \infty,$$

если и только если

$$\int_0^a \rho(x)dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)}dx < \infty.$$

(В этом случае нуль имеет правый тип 0.)

Дадим теперь неформальное описание того, как ведет себя решение в правой полуокрестности нуля для каждого из типов $0, \dots, 6$.

Если нуль имеет правый тип **0**, то для любого $x_0 \in [0, a]$ существует единственное решение до $T_{0,a}$. Оно достигает нуля со строго положительной вероятностью. Примером СДУ, для которого нуль имеет правый тип 0, служит уравнение

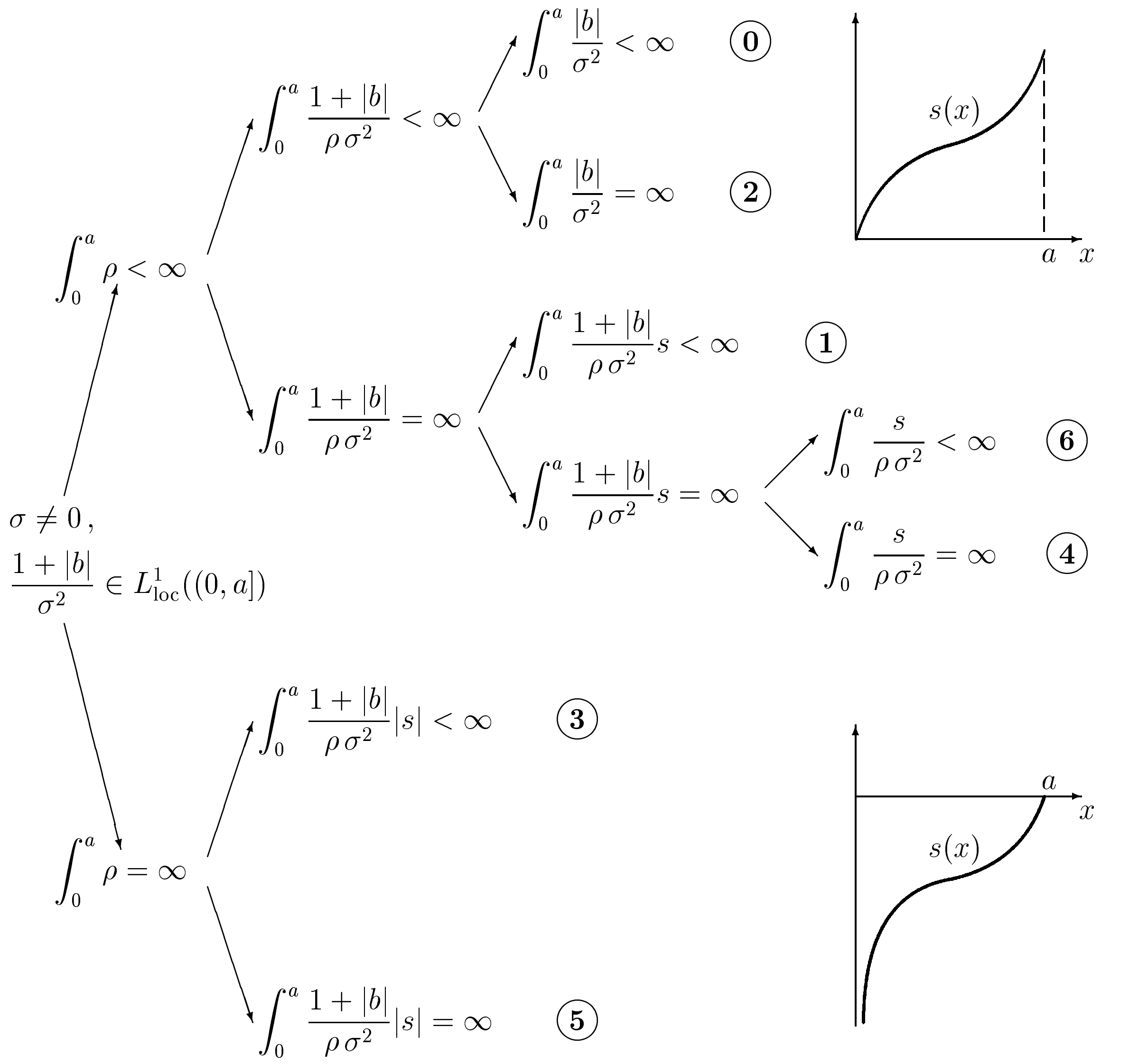
$$dX_t = dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Если нуль имеет правый тип **1**, то для любого $x_0 \in [0, a]$ существует единственное решение до $T_{0,a}$. Оно достигает нуля со строго положительной вероятностью. Любое решение, выходящее из нуля (оно может быть определено до другого момента остановки), отрицательно. Иными словами, решение может покидать нуль только в отрицательном направлении. Для уравнения

$$dX_t = -\frac{1}{2X_t}I(X_t \neq 0)dt + dB_t, \quad X_0 = x_0$$

нуль имеет правый тип 1 (это вытекает из теоремы 4.3а).

Если нуль имеет правый тип **2**, то для любого $x_0 \in [0, a]$ существует единственное положительное решение до T_a. Оно достигает нуля со строго положительной вероятностью и отражается в этой точке. Могут также существовать и другие решения до T_a, но они должны принимать



Типы	Выходные	Невыходные
Входные	2	3
Невходные	0 1	4 5 6

$$\rho(x) = \exp\left(\int_x^a \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}dy\right)$$

$$s(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \rho(y)dy, & \text{если } \displaystyle\int_0^a \rho(y)dy < \infty, \\ \displaystyle -\int_x^a \rho(y)dy, & \text{если } \displaystyle\int_0^a \rho(y)dy = \infty \end{cases}$$

Рис. 2.2. Односторонняя классификация изолированных особых точек

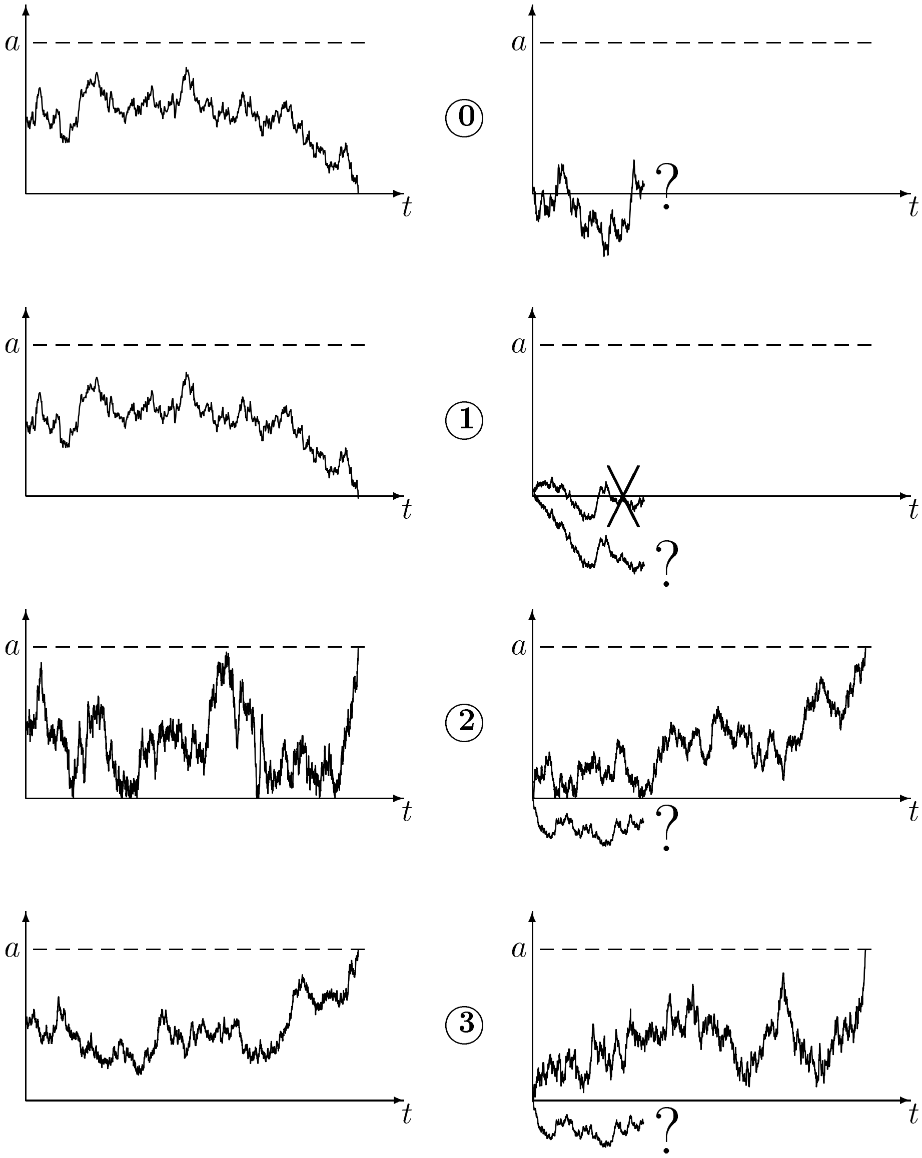


Рис. 2.3.а. Поведение решений для правых типов 0–3. Рисунки показывают смоделированные на компьютере траектории решений. Рисунки слева представляют решения, выходящие из строго положительной точки. Рисунки справа показывают решения, выходящие из нуля. Символ "╳" означает, что для правого типа 1 любое решение, выходящее из нуля, отрицательно.

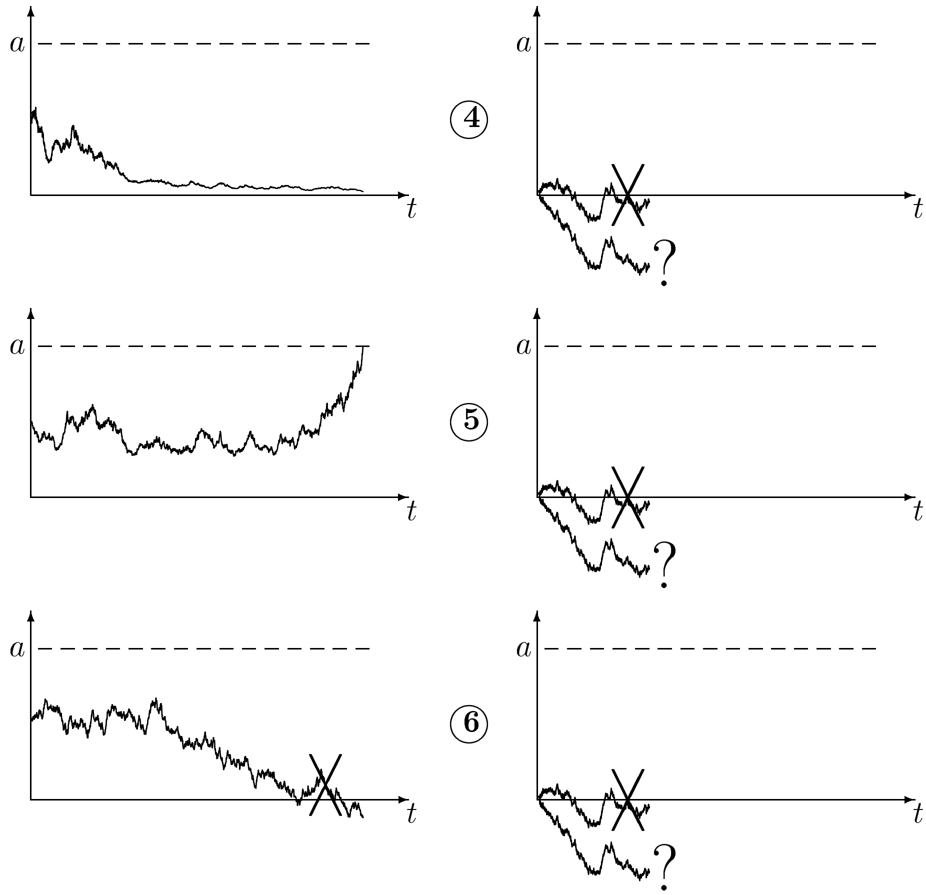


Рис. 2.3.b. Поведение решений для правых типов 4–6. Рисунки показывают смоделированные на компьютере траектории решений. Рисунки слева представляют решения, выходящие из строго положительной точки. Рисунки справа представляют решения, выходящие из нуля. К примеру, символ " ╳ " на нижнем левом рисунке показывает, что для правого типа 6 решение не может быть продолжено после достижения нуля. Символы " ? " показывают, что отрицательное решение может существовать или не существовать.

отрицательные значения (см. параграф 3.1). Примером уравнения, для которого нуль имеет правый тип 2, служит СДУ для процесса Бесселя

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2X_t} I(X_t \neq 0)dt + dB_t, \quad X_0 = x_0$$

с $1 < \delta < 2$ (это вытекает из теоремы 4.3a).

Если нуль имеет правый тип **3**, то для любого $x_0 \in (0, a]$ существует единственное решение до T_a. Это решение не достигает нуля. Существует единственное положительное решение, выходящее из нуля и определенное до T_a. Могут также существовать и другие решения, выходящие из нуля и определенные до T_a, но они должны принимать отрицательные значения (см. параграф 3.1). Для СДУ

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2X_t} I(X_t \neq 0)dt + dB_t, \quad X_0 = x_0$$

с $\delta \geqslant 2$ нуль имеет правый тип 3 (это вытекает из теоремы 4.3a).

Если нуль имеет правый тип **4**, то для любого $x_0 \in (0, a)$ существует единственное решение до T_a. Оно не достигает нуля. Со строго положительной вероятностью оно стремится к нулю при $t \to \infty$. Таким образом, со строго положительной вероятностью решение никогда не достигнет точки a. Для типа 4, как и для типов 5, 6, любое решение, выходящее из нуля, отрицательно. Примером уравнения, для которого нуль имеет правый тип 4, служит СДУ для геометрического броуновского движения

$$dX_t = \mu X_t dt + (X_t + I(X_t = 0))dB_t, \quad X_0 = x_0$$

с $\mu < 1/2$ (это вытекает из теоремы 4.3a).

Если нуль имеет правый тип **5**, то для любого $x_0 \in (0, a]$ существует единственное решение до T_a. Оно не достигает нуля. В отличие от предыдущего случая, решение достигает уровня a п.н. Для СДУ

$$dX_t = \mu X_t dt + (X_t + I(X_t = 0))dB_t, \quad X_0 = x_0$$

с $\mu \geqslant 1/2$ нуль имеет правый тип 5 (это вытекает из теоремы 4.3а).

Если нуль имеет правый тип **6**, то для любого $x_0 \in (0, a)$ существует единственное решение до $\overline{T}_{0,a}-$. Для этого решения момент $\overline{T}_{0,a}$ п.н. конечен. Со строго положительной вероятностью это решение стремится к нулю при $t \uparrow \overline{T}_{0,a}$. При этом не существует решения до $T_{0,a}$, поскольку интеграл $\int_0^{\overline{T}_{0,a}} |b(X_s)| ds$ расходится п.в. на множестве $\{\lim_{t \uparrow \overline{T}_{0,a}} X_t = 0\}$. Пример уравнения, для которого нуль имеет правый тип 6, дается в параграфе 4.4.

Если нуль имеет правый тип 2 или 3, то существует положительное решение, выходящее из нуля. Поэтому типы 2 и 3 можно назвать *входными*. С другой стороны, типы 1, 4, 5, 6 являются *невходными* в следующем смысле: любое решение, выходящее из нуля, отрицательно. С типом 0 ситуация сложнее. Именно, если нуль имеет правый тип 0 и является изолированной особой точкой, то из нуля могут выходить лишь отрицательные решения (это вытекает из результатов параграфа 3.1). Если же нуль имеет правый тип 0 и является неособой точкой, то из нуля выходит знакопеременное решение (это вытекает из теоремы 2.8а, примененной к отрезку $[a, b] \ni 0$ вместо отрезка $[0, a]$).

Если нуль имеет правый тип 0, 1 или 2, то для любого $x_0 \in (0, a)$ существует решение, достигающее нуля со строго положительной вероятностью. Поэтому типы 0, 1, 2 можно назвать *выходными*. Типы же 3, 4, 5, 6 являются *невыходными* в том смысле, что для них любое решение с $x_0 > 0$ не достигает нуля.

§ 2.4 Односторонняя классификация: доказательства

Будем использовать обозначения

$$T_a(Z) = \inf\{t \geqslant 0 : Z_t = a\},$$
$$T_{a,b}(Z) = T_a(Z) \wedge T_b(Z).$$

Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2.9. *Предположим, что выполнено условие* (2.7). *Тогда*

$$\int_0^a \frac{|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty \implies \int_0^a \frac{1}{\rho(x)}dx < \infty, \tag{2.11}$$

$$\int_0^a \frac{|b(x)s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty \implies \int_0^a \frac{|s(x)|}{\rho(x)}dx < \infty. \tag{2.12}$$

Доказательство. Для любого $c \in (0, a]$ имеем

$$\int_c^a \frac{2b(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx = -\int_c^a \frac{\rho'(x)}{\rho^2(x)}dx = -\int_{\rho(c)}^{\rho(a)} \frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{\rho(a)} - \frac{1}{\rho(c)}.$$

Если интеграл в левой части (2.11) сходится, то существует $\theta > 0$ такое, что для любого $c \in (0, a]$ выполнено $\frac{1}{\rho(c)} < \theta$. Это доказывает (2.11).

Для любого $c \in (0, a]$ имеем

$$\begin{aligned}\int_c^a \frac{2b(x)s(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx &= -\int_c^a \frac{s''(x)s(x)}{(s'(x))^2}dx = \int_c^a \left[\left(\frac{s(x)}{s'(x)}\right)' - 1\right]dx \\ &= \frac{s(a)}{s'(a)} - \frac{s(c)}{s'(c)} + c - a = \frac{s(a)}{\rho(a)} - \frac{s(c)}{\rho(c)} + c - a.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Если интеграл в левой части (2.12) сходится, то существует $\theta > 0$ такое, что для любого $c \in (0, a]$ выполнено $|s(c)|/\rho(c) < \theta$. Это доказывает (2.12). $\square$

Доказательство теоремы 2.8a. *Существование.* Пусть $B = (B_t;\ t \geqslant 0)$ — $(\mathcal{G}_t)$-броуновское движение, выходящее из $s(x_0)$ на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q}\big)$. Фильтрация $(\mathcal{G}_t)$ непрерывна справа. Рассмотрим

$$\varkappa(y) = \rho(s^{-1}(y))\sigma(s^{-1}(y)), \quad y \in [0, \alpha], \tag{2.14}$$

$$A_t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \varkappa^{-2}(B_s)ds, & \text{если } t < T_{0,\alpha}(B), \\ \infty, & \text{если } t \geqslant T_{0,\alpha}(B), \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\}, \tag{2.16}$$

$$Y_t = B_{\tau_t}, \quad t \geqslant 0, \tag{2.17}$$

где $\alpha = s(a)$. Для любого $0 < \gamma < \beta < \alpha$ имеем

$$\int_\gamma^\beta \varkappa^{-2}(y)dy = \int_{s^{-1}(\gamma)}^{s^{-1}(\beta)} \frac{1}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty \tag{2.18}$$

(заметим, что функция ρ отделена от нуля на $(0, a]$). Применяя формулу для времен пребывания, получаем

$$\int_0^{T_{\gamma,\beta}(B)} \varkappa^{-2}(B_s)ds = \int_\gamma^\beta \varkappa^{-2}(y)L^y_{T_{\gamma,\beta}(B)}(B)dy < \infty \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.}$$

(заметим, что $L^y_{T_{\gamma,\beta}(B)}$ непрерывно справа по y; см. предложение A.6 (ii)). Значит, процесс A Q-п.н. конечен на $[\![0, T_{0,\alpha}(B)[\![$. Очевидно, τ непрерывен и Q-п.н. конечен. По предложению A.16, $Y \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G}_{\tau_t}, \mathsf{Q})$ и $\langle Y\rangle_t = \tau_t$.

Имеем

$$\lim_{t\uparrow T_{0,\alpha}(B)} B_t = 0 \text{ или } \alpha \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.}$$

Следовательно,

$$\lim_{t\uparrow A_{T_{0,\alpha}(B)-}} Y_t = 0 \text{ или } \alpha \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.}$$

В результате,

$$A_{T_{0,\alpha}(B)-} = T_{0,\alpha}(Y) \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.} \tag{2.19}$$

Дадим теперь другое выражение для τ_t. На множестве $\{t < A_{T_{0,\alpha}(B)-}\}$ имеем

$$\tau_t = \int_0^{\tau_t} \varkappa^2(B_s)\varkappa^{-2}(B_s)ds = \int_0^{\tau_t} \varkappa^2(B_s)dA_s$$
$$= \int_0^t \varkappa^2(B_{\tau_s})ds = \int_0^t \varkappa^2(Y_s)ds.$$

Здесь мы воспользовались предложением A.18 и равенством $A_{\tau_t} = t$ для $t < A_{T_{0,\alpha}(B)-}$. Очевидно, процесс τ непрерывен и является постоянным после момента $A_{T_{0,\alpha}(B)-}$. Учитывая (2.19), получаем

$$\langle Y\rangle_t = \tau_t = \int_0^{t\wedge T_{0,\alpha}(Y)} \varkappa^2(Y_s)ds, \quad t \geqslant 0.$$

Положим $Z = s^{-1}(Y)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E_Q}\int_0^{T_{0,a}(Z)} \big(1 + |b(Z_t)| + \sigma^2(Z_t)\big)dt \\
&= \mathsf{E_Q}\int_0^{T_{0,\alpha}(Y)} \big(1 + |b(s^{-1}(Y_t))| + \sigma^2(s^{-1}(Y_t))\big)dt \\
&= \mathsf{E_Q}\int_0^{T_{0,\alpha}(B)} \frac{1 + |b(s^{-1}(B_t))| + \sigma^2(s^{-1}(B_t))}{\varkappa^2(B_t)}dt \\
&= \mathsf{E_Q}\int_0^{\alpha} \frac{1 + |b(s^{-1}(y))| + \sigma^2(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}L^y_{T_{0,\alpha}(B)}(B)dy \\
&\leqslant 2\int_0^{\alpha} \frac{1 + |b(s^{-1}(y))| + \sigma^2(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}ydy \\
&= 2\int_0^{a} \frac{1 + |b(x)| + \sigma^2(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}s(x)dx < \infty.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Здесь мы воспользовались формулой замены времени (см. предложение A.18) и неравенством

$$\mathsf{E_Q}L^y_{T_{0,\alpha}(B)}(B) \leqslant \mathsf{E_Q}L^y_{T_0(B)}(B) \leqslant 2y, \quad y \in [0,\alpha]$$

(см. предложение A.10 (ii)). Из условий теоремы вытекает, что функция ρ ограничена на $(0,a]$ и отделена от нуля на $(0,a]$. Следовательно, функция s ограничена на $(0,a]$, так что последнее выражение в (2.20) конечно.

Функция $s^{-1}(y)$ абсолютно непрерывна на $(0,\alpha)$ и

$$(s^{-1})'(y) = \frac{1}{\rho(s^{-1}(y))}, \quad y \in (0,\alpha). \tag{2.21}$$

Эта функция, в свою очередь, абсолютно непрерывна на $(0,\alpha)$ и

$$(s^{-1})''(y) = \frac{2b(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}, \quad y \in (0,\alpha). \tag{2.22}$$

Более того,

$$\int_0^\alpha \frac{2|b(s^{-1}(y))|}{\varkappa^2(y)}dy = \int_0^a \frac{2|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty.$$

Значит, мы можем применить формулу Ито–Танака к функции s^{-1} : $[0,\alpha] \to [0,a]$. В результате,

$$\begin{aligned}
Z_t &= s^{-1}(Y_0) + \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{2b(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)} L_t^y(Y)dy + \int_0^t \frac{1}{\rho(s^{-1}(Y_s))}dY_s \\
&= x_0 + \int_0^t \frac{b(s^{-1}(Y_s))}{\varkappa^2(Y_s)}d\langle Y\rangle_s + N_t \\
&= x_0 + \int_0^{t\wedge T_{0,a}(Z)} b(Z_s)ds + N_t, \quad t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Здесь $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G}_{\tau_t}, \mathsf{Q})$ и

$$\begin{aligned}
\langle N\rangle_t &= \int_0^t \frac{1}{\rho^2(s^{-1}(Y_s))}d\langle Y\rangle_s = \int_0^{t\wedge T_{0,\alpha}(Y)} \sigma^2(s^{-1}(Y_s))ds \\
&= \int_0^{t\wedge T_{0,a}(Z)} \sigma^2(Z_s)ds, \quad t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathrm{Law}(Z_t;\, t \geqslant 0)$ и $\mathsf{P} = \widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_{T_{0,a}}$. Докажем теперь, что P является решением (2), определенным до $T_{0,a}$.

Условия (a) и (b) определения 1.10 очевидны. Условие (c) вытекает из (2.20). Проверим условие (d). Для любых $m \in \mathbb{N}$, $s < t$ и $C \in \mathcal{F}_s$, где $(\mathcal{F}_t)$ обозначает натуральную фильтрацию на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$, имеем

$$\mathsf{E}_\mathsf{Q}\big[(N_t^{S_m(N)} - N_s^{S_m(N)})I(Z \in C)\big] = 0,$$

где $S_m(N) = \inf\{t \geqslant 0 : |N_t| \geqslant m\}$. Следовательно, для процесса

$$M_t = X_t - x_0 - \int_0^{t\wedge T_{0,a}} b(X_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

можем написать

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\big[(M_t^{S_m(M)} - M_s^{S_m(M)})I(X \in C)\big] = 0.$$

Это доказывает включение $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$. Условие (e) определения 1.10 проверяется аналогично.

Единственность. Пусть P — произвольное решение до $T_{0,a}$. Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_{T_{0,a}}^{-1}$, где Φ определяется равенством (B.1). Построим теперь решение Q до $T_{0,a}$ со свойством $\mathsf{Q}(T_{0,a} < \infty) = 1$ путем склеивания P с решениями, построенными при доказательстве единственности.

Обозначим через $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ распределение процесса Z, построенного выше для случая, когда $X_0 = x$, $x \in [0, a]$. Из построения Z видно, что меры $\widetilde{\mathsf{P}}_y$ слабо сходятся к $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ при $y \to x$ (мы рассматриваем $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ как меры на $C(\mathbb{R}_+)$, а не на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$). Следовательно, семейство $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x \in [0,a]}$ является переходным ядром (т.е. для любого $A \in \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+))$ отображение $x \mapsto \widetilde{\mathsf{P}}_x(A)$ измеримо).

Фиксируем $u > 0$. Пусть R — мера на $C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+)$, заданная равенством $\mathsf{R}(d\omega_1, d\omega_2) = \widetilde{\mathsf{P}}(d\omega_1)\widetilde{\mathsf{P}}_{\omega_1(u)}(d\omega_2)$ и обозначим через Q образ R при отображении

$$C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+) \ni (\omega_1, \omega_2) \longmapsto \omega \in C(\mathbb{R}_+),$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_1(t), & \text{если } t < u, \\ \omega_2(t-u), & \text{если } t \geqslant u,\ \omega_1(u) = \omega_2(0), \\ \omega_1(u), & \text{если } t \geqslant u,\ \omega_1(u) \neq \omega_2(0). \end{cases}$$

Очевидно, $\mathsf{Q}(X_0 = x_0) = 1$ и для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^{t \wedge T_{0,a}} \big(|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\big)ds < \infty \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.}$$

Очевидно, процесс

$$K_t = X_{t\wedge u} - x_0 - \int_0^{t\wedge u\wedge T_{0,a}} b(X_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

является непрерывным $(\mathcal{F}_t, \mathsf{Q})$-локальным мартингалом. Рассмотрим процесс

$$N_t = X_{t\vee u} - X_u - \int_{u\wedge T_{0,a}}^{(t\vee u)\wedge T_{0,a}} b(X_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

и моменты остановки $\tau_m = \inf\{t \geqslant u : |N_t| \geqslant m\}$. Положим

$$X_t^1 = X_{t\wedge u}, \quad X_t^2 = X_{t+u}, \quad t \geqslant 0.$$

Для любых $u \leqslant s \leqslant t$, $C^1 \in \mathcal{F}_u$, $C^2 \in \mathcal{F}_{s-u}$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big(N_t^{\tau_m} - N_s^{\tau_m}\big)I(X^1 \in C^1, X^2 \in C^2) \\ &= \int_{C(\mathbb{R}_+)}\int_{C(\mathbb{R}_+)} \big(N_{t\wedge\tau_m}(\omega_2) - N_{s\wedge\tau_m}(\omega_2)\big)I(X^1(\omega_1) \in C^1) \\ &\qquad\qquad I(X^2(\omega_2) \in C^2)\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega_1)\widetilde{\mathsf{P}}_{\omega_1(u)}(d\omega_2) = 0. \end{aligned}$$

Из леммы о монотонных классах вытекает, что для любого $C \in \mathcal{F}_u$ имеем

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big(N_t^{\tau_m} - N_s^{\tau_m}\big)I(X \in C) = 0.$$

Учитывая мартингальное свойство K, заключаем, что процесс

$$M_t = X_t - x_0 - \int_0^{t\wedge T_{0,a}} b(X_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

является непрерывным $(\mathcal{F}_t, \mathsf{Q})$-локальным мартингалом. Аналогично доказывается, что процесс

$$M_t^2 - \int_0^{t\wedge T_{0,a}} \sigma^2(X_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

является непрерывным $(\mathcal{F}_t, \mathsf{Q})$-локальным мартингалом.

Положим $Y = s(X)$. По формуле Ито–Танака, $Y \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \mathsf{Q})$ и

$$\langle Y\rangle_t = \int_0^{t\wedge T_{0,a}(Y)} \varkappa^2(Y_s)ds, \quad t \geqslant 0,$$

где $\varkappa$ задано равенством (2.14). Рассмотрим

$$A_t = \begin{cases} \int_0^t \varkappa^2(Y_s)ds, & \text{если } t < T_{0,\alpha}(Y), \\ \infty, & \text{если } t \geqslant T_{0,\alpha}(Y), \end{cases}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},$$

$$V_t = Y_{\tau_t}, \quad t \geqslant 0.$$

Из построения $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ следует, что для любого $x \in [0,a]$ имеем $\widetilde{\mathsf{P}}_x(T_{0,a} < \infty) = 1$. Следовательно, $\mathsf{Q}(T_{0,a} < \infty) = 1$. Те же рассуждения, что были использованы при доказательстве единственности, показывают, что $A_{T_{0,\alpha}(Y)-} = T_{0,\alpha}(V)$ Q-п.н., где $\alpha = s(a)$ и

$$\tau_t = \int_0^{t\wedge T_{0,\alpha}(V)} \varkappa^{-2}(V_s)ds, \quad t \geqslant 0. \tag{2.23}$$

По предложению А.16,

$$\langle V\rangle_t = \langle Y\rangle_{\tau_t} = t \wedge A_{T_{0,\alpha}(Y)-} = t \wedge T_{0,\alpha}(V), \quad t \geqslant 0.$$

Существует броуновское движение W (определенное, возможно, на расширенном вероятностном пространстве) такое, что $W = V$ на $[\![0, T_{0,\alpha}(W)]\!]$. Тогда (2.23) можно переписать в виде

$$\tau_t = \int_0^{t\wedge T_{0,\alpha}(W)} \varkappa^{-2}(W_s)ds, \quad t \geqslant 0.$$

Кроме того, $A_t = \inf\{s \geqslant 0 : \tau_s > t\}$ и $Y_t = V_{A_t} = W_{A_t}$, $t \geqslant 0$. В результате, мера Q определена однозначно (т.е. она не зависит от выбора решения P). Поскольку $u > 0$ было выбрано произвольно, заключаем, что мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ определена однозначно. Но $\mathsf{P} = \widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_{T_{0,a}}$ (см. лемму B.3). Это завершает доказательство единственности.

Неравенство $\mathsf{E}_{\mathsf{P}}T_{0,a} < \infty$ вытекает из (2.20). Свойство $\mathsf{P}(X_{T_{0,a}} = 0) > 0$ ясно из построения решения. Действительно, для процесса Y, определенного равенством (2.17), имеем

$$\mathsf{P}(Y_{T_{0,\alpha}(Y)} = 0) = \mathsf{P}(B_{T_{0,\alpha}(B)} = 0) > 0.$$

Доказательство завершено. □

Доказательство теоремы 2.8б. *Существование.* Рассмотрим функции

$$\overline{\rho}(x) = \rho(|x|), \quad x \in [-a, a],$$
$$\overline{s}(x) = s(|x|)\operatorname{sgn} x, \quad x \in [-a, a].$$

Применяя ту же процедуру, что и при доказательстве существования в теореме 2.8а с интервалом $[-a, a]$ вместо $[0, a]$, функцией $\overline{\rho}$ вместо функции ρ, функцией $\overline{s}$ вместо функции s и функцией $\overline{\varkappa}(y) = \overline{\rho}(\overline{s}^{-1}(y))\overline{\sigma}(\overline{s}^{-1}(y))$ вместо функции $\varkappa$, получаем меру $\overline{\mathsf{P}}$ на $\mathcal{F}_{T_{-a,a}}$, являющуюся решением СДУ

$$dX_t = \overline{b}(X_t)dt + \overline{\sigma}(X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0$$

до $T_{-a,a}$. Здесь

$$\overline{b}(x) = b(|x|)\operatorname{sgn} x, \quad x \in [-a, a],$$
$$\overline{\sigma}(x) = \sigma(|x|), \quad x \in [-a, a].$$

В частности, (2.18) заменяется на

$$\int_{-a}^{a} \overline{\varkappa}^{-2}(y)dy = \int_{-a}^{a} \frac{1}{\overline{\rho}(x)\overline{\sigma}^2(x)}dx = \int_0^a \frac{2}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty,$$

и для проверки аналога неравенства (2.20) необходимо применить лемму 2.9. Аргументы, использованные при доказательстве теоремы 2.5а, показывают, что $L_t^0(X) = 0$ $\overline{\mathsf{P}}$-п.н. Отображение $C(\mathbb{R}_+) \ni \omega \longmapsto |\omega| \in C(\mathbb{R}_+)$ является $\mathcal{F}_{T_{-a,a}}|\mathcal{F}_{T_a}$-измеримым. Следовательно, можем определить меру P на $\mathcal{F}_{T_a}$ как образ $\overline{\mathsf{P}}$ при этом отображении. Используя формулу Ито–Танака и равенство $L_t^0(X) = 0$ $\overline{\mathsf{P}}$-п.н., получаем, что P является решением (2) до T_a. Очевидно, это решение положительно.

Единственность. Пусть P — произвольное решение до T_a. Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_{T_a}^{-1}$, где Φ определено равенством (B.1). Фиксируем $u > 0$.

Используя тот же метод, что и при доказательстве единственности в теореме 2.8a, строим меру Q на $C(\mathbb{R}_+)$ такую, что $\mathsf{Q}|\mathcal{F}_u = \widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_u$, $\mathsf{Q}(X_0 = x_0) = 1$,

$$\int_0^{t\wedge T_a} \bigl(|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\bigr)ds < \infty \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.}$$

для любого $t \geqslant 0$ и процессы

$$M_t = X_t - x_0 - \int_0^{t\wedge T_a} b(X_s)ds, \quad t \geqslant 0,$$

$$M_t^2 - \int_0^{t\wedge T_a} \sigma^2(X_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

являются непрерывными $(\mathcal{F}_t, \mathsf{Q})$-локальными мартингалами. Кроме того, $\mathsf{Q}(T_a < \infty) = 1$.

Выберем $\delta \in (0, a)$ и положим $\Delta = s(\delta)$, $Y = s(X) \vee \Delta$. Применяя формулу Ито–Танака к функции $x \mapsto s(x) \vee \Delta$, получаем

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t I(X_s > \delta)\rho(X_s)dM_s + \frac{1}{2}\rho(\delta)L_t^\delta(X), \quad t \geqslant 0. \tag{2.24}$$

Применяя формулу Ито–Танака к функции $y \mapsto y \vee \Delta$, получаем

$$\begin{aligned} Y_t = Y_t \vee \Delta &= Y_0 + \int_0^t I(Y_s > \Delta)I(X_s > \delta)\rho(X_s)dM_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\rho(\delta)\int_0^t I(Y_s > \Delta)dL_t^\delta(X) + \frac{1}{2}L_t^\Delta(Y) \\ &= Y_0 + \int_0^t I(Y_s > \Delta)\rho(s^{-1}(Y_s))dM_s + \frac{1}{2}L_t^\Delta(Y) \\ &= Y_0 + N_t + \frac{1}{2}L_t^\Delta(Y). \end{aligned} \tag{2.25}$$

(В третьем равенстве мы воспользовались предложением A.5.)

Рассмотрим

$$D_t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t I(Y_s > \Delta)ds, & \text{если } t < T_\alpha(Y), \\ \infty, & \text{если } t \geqslant T_\alpha(Y), \end{cases}$$

$$\varphi_t = \inf\{s \geqslant 0 : D_s > t\},$$

$$U_t = Y_{\varphi_t} = U_0 + N_{\varphi_t} + \frac{1}{2}L_{\varphi_t}^\Delta(Y), \quad t \geqslant 0,$$

где $\alpha = s(a)$. Из предложения A.15 вытекает, что N τ-непрерывен. Предложение A.16 показывает, что процесс $K_t = N_{\varphi_t}$ является $(\mathcal{F}^+_{\varphi_t}, \mathsf{Q})$-локальным мартингалом. На множестве $\{t < D_{T_\alpha(Y)-}\}$ имеем

$$\begin{aligned}\langle K\rangle_t = \langle N\rangle_{\varphi_t} &= \int_0^{\varphi_t} \varkappa^2(Y_s) I(Y_s > \Delta) ds \\ &= \int_0^{\varphi_t} \varkappa^2(Y_s) dD_s = \int_0^t \varkappa^2(U_s) ds, \quad t \geqslant 0.\end{aligned}$$

Процессы K и $\langle K\rangle$ непрерывны и являются постоянными после момента $D_{T_\alpha(Y)-}$. Кроме того,

$$D_{T_\alpha(Y)-} \leqslant T_\alpha(Y) < \infty \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.}$$

Аналогично равенству (2.19), проверяем, что $D_{T_\alpha(Y)-} = T_\alpha(U)$ Q-п.н. В результате,

$$\langle K\rangle_t = \int_0^{t\wedge T_\alpha(U)} \varkappa^2(U_s) ds, \quad t \geqslant 0.$$

Очевидно, $U = U \vee \Delta$. Применяя формулу Ито–Танака к функции $x \mapsto x \vee \Delta$, получаем

$$U_t = U_0 + \int_0^t I(U_s > \Delta) dK_s + \frac{1}{2}\int_0^t I(U_s > \Delta) dL^\Delta_{\varphi_s}(Y) + \frac{1}{2} L^\Delta_t(U), \quad t \geqslant 0.$$

По предложениям A.5 и A.18,

$$\int_0^t I(U_s > \Delta) dL^\Delta_{\varphi_s}(Y) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_t} I(Y_s > \Delta) dL^\Delta_s(Y) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Из единственности семимартингального разложения U следует, что

$$\int_0^t I(U_s > \Delta) dK_s = K_t, \quad t \geqslant 0.$$

В результате,

$$U_t = U_0 + K_t + \frac{1}{2} L^\Delta_t(U), \quad t \geqslant 0. \tag{2.26}$$

Рассмотрим

$$A_t = \begin{cases} \int_0^t \varkappa^2(U_s)ds, & \text{если } t < T_\alpha(U), \\ \infty, & \text{если } t \geqslant T_\alpha(U), \end{cases}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},$$

$$V_t = U_{\tau_t} = V_0 + K_{\tau_t} + \frac{1}{2}L^{\Delta}_{\tau_t}(U), \quad t \geqslant 0.$$

Рассуждая так же, как и выше, получаем $A_{T_\alpha(U)-} = T_\alpha(V)$ Q-п.н. Процесс $J_t = K_{\tau_t}$ является $(\mathcal{G}_{\tau_t}, \mathsf{Q})$-локальным мартингалом, где $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}^+_{\varphi_t}$, и $\langle J\rangle_t = t \wedge T_\alpha(V)$, $t \geqslant 0$. Следующее равенство проверятся так же, как и (2.26):

$$V_t - V_0 = J_t + \frac{1}{2}L^{\Delta}_t(V), \quad t \geqslant 0.$$

Существует броуновское движение W (определенное, возможно, на расширенном вероятностном пространстве) такое, что J совпадает с W на $[\![0, T_\alpha(V)]\!]$. Заметим, что $V \geqslant \Delta$ и V останавливается в момент достижения точки α. Предложения A.32 и A.33 показывают, что процесс V является броуновским движением, выходящим из точки $V_0 = s(x_0) \vee \Delta$, отраженным в точке Δ и остановленным в момент достижения точки α. Используя те же рассуждения, что и при доказательстве единственности в теореме 2.8a, заключаем, что мера $\mathsf{R}^\delta = \mathrm{Law}(U_t; t \geqslant 0 \mid \mathsf{Q})$ определена однозначно (т.е. не зависит от выбора решения P). Верхний индекс δ показывает, что U зависит от δ. Можем написать

$$\begin{aligned} \int_0^{t\wedge T_a} I(X_s = 0)ds &= \int_0^{t\wedge T_a} \frac{I(X_s = 0)}{\sigma^2(X_s)} d\langle X\rangle_s \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{I(x = 0)}{\sigma^2(0)} L^x_{t\wedge T_a}(X)dx = 0 \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Из этого равенства и свойства $\mathsf{Q}(\forall t \geqslant 0,\ X_t \geqslant 0) = 1$ вытекает, что меры R^δ слабо сходятся к мере $\mathsf{R} = \mathrm{Law}(s(X_t); t \geqslant 0 \mid \mathsf{Q})$ при $\delta \downarrow 0$. Итак, мера Q определена однозначно. Доказательство единственности завершается так же, как в теореме 2.8a.

Неравенство $\mathsf{E}_{\mathsf{P}} T_a < \infty$ вытекает из (2.20). Свойство $\mathsf{P}(\exists t \leqslant T_a : X_t = 0) > 0$ вытекает из построения решения. $\square$

`Доказательство теоремы 2.8в.` **(i)** Предположим, что существует решение (P, S) такое, что

$$\mathsf{P}\big(\sup\nolimits_{t \in [T_0, S]} X_t \geqslant c\big) > 0$$

для некоторого $c > 0$. Можем предположить, что $c \leqslant a$, момент S ограничен и $S \leqslant T_c^0$, где $T_c^0 := \inf\{t \geqslant T_0 : X_t = c\}$. Иначе мы можем выбрать меньшее c и рассмотреть $S \wedge T_c^0 \wedge m$ вместо S, где m — достаточно большое число.

Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_S^{-1}$ (Φ определяется равенством (B.1)) и

$$X'_t = \int_0^t I(s \geqslant T_0) dX_s, \quad t \geqslant 0.$$

Возьмем $\delta \in (0, c)$ и положим $\Delta = s(\delta)$, $Y = s(\delta \vee X')$. Выкладки, аналогичные (2.24) и (2.25), показывают, что

$$Y_t = \Delta + N_t + \frac{1}{2} L_t^{\Delta}(Y), \quad t \geqslant 0,$$

где $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$ и

$$\langle N \rangle_t = \int_0^t I(T_0 \leqslant s \leqslant S) I(Y_s > \Delta) \varkappa^2(Y_s) ds, \quad t \geqslant 0$$

($\varkappa$ определено равенством (2.14)).

Рассмотрим

$$A_t = \begin{cases} \langle N \rangle_t, & \text{если } t < S, \\ \infty, & \text{если } t \geqslant S, \end{cases}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},$$

$$U_t = Y_{\tau_t} = \Delta + N_{\tau_t} + \frac{1}{2} L_{\tau_t}^{\Delta}(Y), \quad t \geqslant 0.$$

Из предложения A.15 вытекает, что N τ-непрерывен. Кроме того, τ ограничено, поскольку $\tau \leqslant S$. По предложению A.16, процесс $V_t = N_{\tau_t}$

является $(\mathcal{F}^+_{\tau_t}, \widetilde{\mathsf{P}})$-локальным мартингалом с $\langle V\rangle_t = t \wedge \eta$, где $\eta = A_{S-}$. Следующее равенство доказывается так же, как (2.26):

$$U_t = \Delta + V_t + \frac{1}{2} L^{\Delta}_t(U), \quad t \geqslant 0.$$

Предложения A.32 и A.33 показывают, что процесс $U - \Delta$ является модулем броуновского движения, выходящего из нуля и остановленного в момент η. (Заметим, что η является $(\mathcal{F}^+_{\tau_t})$-моментом остановки.) Имеем

$$\widetilde{\mathsf{P}}(\eta = T_\gamma(U)) = \mathsf{P}\bigl(\sup\nolimits_{t \in [T_0, S]} X_t \geqslant c\bigr) > 0, \tag{2.28}$$

где $\gamma = s(c)$.

Рассмотрим функцию

$$g(y) = \frac{1 + |b(s^{-1}(y))|}{\varkappa^2(y)} I(0 < y < \gamma).$$

Из условий теоремы вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\varepsilon} g(y)dy = \int_0^{s^{-1}(\varepsilon)} \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} dx = \infty.$$

Отсюда и из предложений A.6 (ii), A.8 получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_\gamma(\Delta + |W|)} g(\Delta + |W_s|)ds &= \int_0^{T_{\gamma-\Delta}(|W|)} g(\Delta + |W_s|)ds \\
&= \int_0^{\gamma-\Delta} L^y_{T_{\gamma-\Delta}(|W|)}(|W|) g(\Delta + y)dy \\
&\geqslant \int_0^{\gamma-\Delta} L^y_{T_{\gamma-\Delta}(|W|)}(W) g(\Delta + y)dy \xrightarrow[\Delta \downarrow 0]{\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п.н.}} \infty,
\end{aligned}$$

где W — броуновское движение, выходящее из нуля. Следовательно, для любого $\lambda > 0$ существует $\Delta \in (0, \gamma)$ такое, что

$$\widetilde{\mathsf{P}}\biggl(\int_0^{T_\gamma(U)} g(U_s)ds > \lambda\biggr) > 1 - \frac{1}{2}\widetilde{\mathsf{P}}(\eta = T_\gamma(U)). \tag{2.29}$$

С другой стороны, для любого $\Delta \in (0,\gamma)$ имеем

$$\begin{aligned}\int_0^\eta g(U_s)ds &= \int_0^{A_{S-}} \frac{1+|b(s^{-1}(U_s))|}{\varkappa^2(U_s)}ds\\ &= \int_{\tau_0}^{S-} \frac{1+|b(s^{-1}(Y_s))|}{\varkappa^2(Y_s)}dA_s\\ &= \int_0^S I(s \geqslant T_0)I(X_s > \delta)(1+|b(X_s)|)ds\\ &\leqslant \int_0^S (1+|b(X_s)|)ds < \infty \quad \widetilde{\mathsf{P}}\text{-п.н.}\end{aligned}$$

Мы приходим к противоречию с (2.28) и (2.29), поскольку λ может быть выбрано сколь угодно большим.

(ii) *Существование.* Определим процесс Y равенством (2.17), где B — $(\mathcal{G}_t)$-броуновское движение, выходящее из точки $s(x_0)$, заданное на фильтрованном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q}\big)$. Неравенство (2.20) остается верным (следует принять во внимание лемму 2.9). Положим $Z = s^{-1}(Y)$. Формула Ито–Танака показывает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ процесс

$$N_t^{(n)} = Z_{t\wedge T_{1/n,a}(Z)} - x_0 - \int_0^{t\wedge T_{1/n,a}(Z)} b(Z_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

является непрерывным $(\mathcal{G}_{\tau_t}, \mathsf{Q})$-локальным мартингалом. Рассмотрим процесс

$$N_t = Z_t - x_0 - \int_0^{t\wedge T_{0,a}(Z)} b(Z_s)ds, \quad t \geqslant 0.$$

Заметим, что $Z^{T_{0,a}(Z)} = Z$ Q-п.н. Из неравенства (2.20) следует, что $N^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Q-u.p.}} N$. По лемме B.11, $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G}_t, \mathsf{Q})$. Аналогично проверяем, что

$$\langle N\rangle_t = \int_0^{t\wedge T_{0,a}(Z)} \sigma^2(Z_s)ds, \quad t \geqslant 0.$$

Доказательство существования теперь завершается так же, как и в теореме 2.8a.

Единственность. Пусть P — построенное выше решение до $T_{0,a}$. Предположим, что существует другое решение P' до $T_{0,a}$. Если $x_0 = 0$, то требуемое утверждение очевидно. Предположим теперь, что $x_0 > 0$. Из теоремы 2.8а следует, что для любого $n > 1/x_0$ выполнено $\mathsf{P}'|\mathcal{F}_{T_{1/n,a}} = \mathsf{P}|\mathcal{F}_{T_{1/n,a}}$. Заметим, что $T_{1/n,a}(\omega) \leqslant T_{0,a}(\omega)$ для P,P'-п.в. ω, но не для всех ω, т.к. $\omega(0)$ может быть отлично от x_0. Поэтому здесь используется соглашение из леммы B.5. Применяя лемму B.6, получаем $\mathsf{P}' = \mathsf{P}$.

Неравенство $\mathsf{E}_\mathsf{P} T_{0,a} < \infty$ вытекает из (2.20). Свойство $\mathsf{P}(T_{0,a} < \infty$ и $X_{T_{0,a}} = 0) > 0$ вытекает из построения решения. $\square$

`Доказательство теоремы 2.8г.` **(i)** Предположим, что существует решение (P, S) такое, что $\mathsf{P}(S \geqslant T_0) > 0$. Можем предположить, что $S \leqslant T_0$ и момент S ограничен (иначе можем взять $S \wedge T_0 \wedge m$ вместо S, где m — достаточно большое число). Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_S^{-1}$ (Φ определяется равенством (B.1)). Выберем $\delta \in (0, x_0 \wedge a)$ и положим $\Delta = s(\delta)$. Рассмотрим процесс $Y = 0 \vee s(X) \wedge \Delta$ и моменты остановки $S_n = S \wedge T_{1/n}(Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Формула Ито–Танака показывает, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$Y_{t\wedge S_n} = \Delta + N_t^{(n)} - \frac{1}{2}\rho(\delta)L_t^\delta(X), \quad t \geqslant 0$$

(мы воспользовались равенством $L_t^0(X) = 0$; оно доказывается аналогично теореме 2.5а), где $N^{(n)} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$ и

$$\langle N^{(n)}\rangle_t = \int_0^{t\wedge S_n} I(Y_s < \Delta)\varkappa^2(Y_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

($\varkappa$ определяется равенством (2.14)). Используя тот же прием, что и в (2.24), (2.25), проверяем, что

$$Y_{t\wedge S_n} = \Delta + N_t^{(n)} - \frac{1}{2}L_t^{\Delta-}(Y), \quad t \geqslant 0,$$

где $L_t^{\Delta-}(Y) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} L_t^{\Delta-\varepsilon}(Y)$ (см. предложение A.6 (i)). Рассмотрим процесс

$$N_t = Y_t - \Delta + \frac{1}{2}L_t^{\Delta-}(Y), \quad t \geqslant 0.$$

Тогда $N^{(n)} = N^{S_n}$. Очевидно, $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п.н.}} S$. Итак, $N^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\widetilde{\mathsf{P}}\text{-u.p.}} N$. По лемме B.11, $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$ и $\langle N^{(n)}\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{\widetilde{\mathsf{P}}\text{-u.p.}} \langle N\rangle$. Следовательно,

$$\langle N\rangle_t = \int_0^{t\wedge S} I(Y_s < \Delta)\varkappa^2(Y_s)ds, \quad t \geqslant 0.$$

Рассмотрим

$$A_t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t I(Y_s < \Delta)\varkappa^2(Y_s)ds, & \text{если } t < S, \\ \infty, & \text{если } t \geqslant S, \end{cases}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},$$

$$U_t = Y_{\tau_t} = \Delta + N_{\tau_t} - \frac{1}{2}L_{\tau_t}^{\Delta-}(Y), \quad t \geqslant 0.$$

Следующее равенство доказывается так же, как (2.26):

$$U_t - \Delta = V_t - \frac{1}{2}L_t^{\Delta-}(U), \quad t \geqslant 0,$$

где $V_t = N_{\tau_t}$. Процесс V является стандартным броуновским движением, остановленным в момент $\eta = A_{S-}$. Предложения A.32 и A.33 показывают, что процесс $\Delta - U$ является модулем броуновского движения, выходящего из нуля и остановленного в момент η.

Рассмотрим функцию

$$g(y) = \frac{1 + |b(s^{-1}(y))|}{\varkappa^2(y)} I(0 < y < \Delta).$$

Из условий теоремы вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon yg(y)dy = \int_0^{s^{-1}(\varepsilon)} \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)} s(x)dx = \infty.$$

Следствие A.24 показывает, что

$$\int_0^{T_0(\Delta - |W|)} g(\Delta - |W_s|)ds = \infty \quad \text{п.н.},$$

где W — броуновское движение, выходящее из нуля. Следовательно, интеграл $\int_0^\eta g(U_s)ds$ $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н. расходится на множестве

$$\{\eta = T_0(U)\} = \{\inf_{t\geqslant 0} U_t = 0\} = \{\inf_{t\leqslant S} X_t = 0\},$$

причем это множество имеет строго положительную $\widetilde{\mathsf{P}}$-вероятность. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\int_0^\eta g(U_s)ds &= \int_0^{A_{S-}} \frac{1+|b(s^{-1}(U_s))|}{\varkappa^2(U_s)}ds \\ &= \int_{\tau_0}^{S-} \frac{1+|b(s^{-1}(Y_s))|}{\varkappa^2(Y_s)}dA_s \\ &= \int_0^S I(s \leqslant S)I(X_s < \delta)(1+|b(X_s)|)ds \\ &\leqslant \int_0^S (1+|b(X_s)|)ds < \infty \quad \widetilde{\mathsf{P}}\text{-п.н.}\end{aligned}$$

Это приводит к противоречию.

(ii) Доказательство проводится так же, как в теореме 2.8в (i).

(iii) *Существование.* Определим процесс Y равенством (2.17). Положим $Z = s^{-1}(Y)$, $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathrm{Law}(Z_t;\, t \geqslant 0)$, $\mathsf{P} = \widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_{\overline{T}_{0,a}-}$. Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 2.8а, показывают, что для любого $n > 2/a$ мера $\widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_{T_{1/n,a-1/n}}$ является решением до $T_{1/n,a-1/n}$. Моменты остановки

$$S_n = \inf\{t \geqslant 0 : |X_t| \leqslant 1/n\} \wedge \inf\{t \geqslant 0 : |X_t - a| \leqslant 1/n\}$$

образуют упреждающую последовательность для $\overline{T}_{0,a}$. Очевидно, для любого $n > 2/a \vee 1/x_0$ мера $\mathsf{P}|\mathcal{F}_{S_n}$ является решением до S_n. Следовательно, P является решением до $\overline{T}_{0,a}-$.

Единственность. Пусть P — построенное выше решение до $\overline{T}_{0,a}$. Предположим, что существует другое решение P' до $\overline{T}_{0,a}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ сужения $\mathsf{P}^n = \mathsf{P}|\mathcal{F}_{S_n}$ и $\mathsf{P}'^n = \mathsf{P}'|\mathcal{F}_{S_n}$ являются решениями до S_n (здесь используется соглашение из леммы B.5). По лемме B.5, каждая из мер P^n, P'^n допускает единственное продолжение на $\mathcal{F}_{T_{1/n,a-1/n}}$. Очевидно, эти продолжения являются решениями до $T_{1/n,a-1/n}$, и по теореме 2.8а они совпадают. Следовательно, $\mathsf{P}'^n = \mathsf{P}^n$. Выберем теперь

$t \geqslant 0$ и $A \in \mathcal{F}_t$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}'(A \cap \{\overline{T}_{0,a} > t\}) &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}'(A \cap \{S_n > t\}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}'^n(A \cap \{S_n > t\}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}^n(A \cap \{S_n > t\}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A \cap \{S_n > t\}) = \mathsf{P}(A \cap \{\overline{T}_{0,a} > t\}).\end{aligned}$$

Применяя лемму о монотонных классах, получаем $\mathsf{P}' = \mathsf{P}$.

Для доказательства неравенства $\mathsf{E}_\mathsf{P}\overline{T}_{0,a} < \infty$ заметим, что для любого $n > 1/x_0$

$$\mathsf{E}_\mathsf{P} T_{1/n,a} \leqslant 2\int_0^a \frac{s(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty$$

(см. (2.20)).

Свойство $\mathsf{P}(\lim_{t\uparrow\overline{T}_{0,a}} X_t = 0) > 0$ вытекает из построения решения. □

`Доказательство теоремы 2.8д.` **(i)** Доказательство проводится так же, как в теореме 2.8г (i).

(ii) Доказательство проводится так же, как в теореме 2.8в (i).

(iii) *Существование.* Определим процесс Y равенством (2.17), где B — $(\mathcal{G}_t)$-броуновское движение, выходящее из точки $s(x_0)$, заданное на фильтрованном вероятностном пространстве $\bigl(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q}\bigr)$. Из следствия А.24 вытекает, что случайная величина $A_{T_{0,\alpha}(B)-}$ Q-п.н. бесконечна на множестве $\{T_0(B) < T_\alpha(B)\}$. Следовательно, процесс Y Q-п.н. строго положителен. Кроме того,

$$\lim_{t\to\infty} Y_t = 0 \ \mathsf{Q}\text{-п.н. на } \{T_0(B) < T_\alpha(B)\}. \tag{2.30}$$

Положим $Z = s^{-1}(Y)$, $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathrm{Law}(Z_t;\, t \geqslant 0)$, $\mathsf{P} = \widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_{T_a}$. Оценки, использованные в (2.20), показывают, что для любого $c \in (0, x_0)$ выполнено

$$\mathsf{E}_\mathsf{Q}\int_0^{T_{a,c}(Z)} \bigl(1 + |b(Z_t)| + \sigma^2(Z_t)\bigr)dt < \infty.$$

Устремляя $c \to 0$, получаем, что для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^{t\wedge T_a(Z)} \bigl(1 + |b(Z_s)| + \sigma^2(Z_s)\bigr)ds < \infty \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.}$$

Теперь доказательство существования завершается так же, как в теореме 2.8a.

Единственность. Пусть P — построенное выше решение до T_a. Предположим, что существует другое решение P' до T_a. Из теоремы 2.8a вытекает, что для любого $n > 1/x_0$ выполнено $\mathsf{P}'|\mathcal{F}_{T_{1/n,a}} = \mathsf{P}|\mathcal{F}_{T_{1/n,a}}$. Поскольку решение (P, T_a) строго положительно, $\mathsf{P}(T_{1/n,a} = T_a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Следовательно, $\mathsf{P}'(T_{1/n,a} = T_a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Применяя лемму B.6, получаем, что $\mathsf{P}' = \mathsf{P}$.

Свойства $\mathsf{P}(T_a = \infty) > 0$ и $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ P-п.н. на $\{T_a = \infty\}$ вытекают из (2.30). □

`Доказательство теоремы 2.8e.` **(i)** Предположим, что существует решение (P, S) такое, что $\mathsf{P}(T_0 < \infty,\ T_0 \leqslant S) > 0$. Тогда существует $d \in (0, a)$ такое, что

$$\mathsf{P}\Big(T_0 < \infty,\ T_0 \leqslant S, \text{ и } \sup_{t\in[T_d,T_0]} X_t < a\Big) = \theta > 0. \tag{2.31}$$

Выберем $\delta \in (0, d)$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} X'_t &= d + \int_0^t I(s > T_d)dX_s, \quad t \geqslant 0,\\ Y_t &= s\big(X'_{t\wedge T_{\delta,a}(X')}\big), \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Формула Ито–Танака показывает, что Y является $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$-локальным мартингалом, где $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_S^{-1}$ (Φ задается равенством (B.1)). Кроме того, Y ограничен, и поэтому существует предел $Y_\infty = \lim_{t\to\infty} Y_t$. Имеем

$$\begin{aligned} s(d) = Y_0 &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} Y_\infty\\ &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\big[Y_\infty I\big(T_{s(\delta)}(Y) = \infty\big)\big] + \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\big[Y_\infty I\big(T_{s(\delta)}(Y) < \infty\big)\big] \leqslant \theta s(\delta), \end{aligned}$$

где θ определено в (2.31). (В неравенстве выше мы использовали, что $Y \leqslant 0$.) Поскольку $s(\delta) \xrightarrow[\delta\downarrow 0]{} -\infty$, приходим к противоречию.

(ii) *Существование.* Рассмотрим

$$A_t = \begin{cases} \int_0^t \varkappa^{-2}(B_s)ds, & \text{если } t < T_0(B), \\ \infty, & \text{если } t \geqslant T_0(B), \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\}, \tag{2.33}$$

$$Y_t = B_{\tau_t}, \quad t \geqslant 0, \tag{2.34}$$

где B — броуновское движение, выходящее из точки $s(x_0)$, заданное на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{P})$, а $\varkappa$ определяется в (2.14). Заметим, что $s(x_0) \leqslant s(a) = 0$. Используя те же аргументы, что и при доказательстве существования в теореме 2.8а, показываем, что $A_{T_0(B)-} = T_0(Y)$ Q-п.н. Для $Z = s^{-1}(Y)$ имеем

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}_\mathsf{Q} \int_0^{T_a(Z)} \big(1 + |b(Z_t)| + \sigma^2(Z_t)\big)dt \\ &= \mathsf{E}_\mathsf{Q} \int_0^{T_a(Y)} \big(1 + |b(s^{-1}(Y_t))| + \sigma^2(s^{-1}(Y_t))\big)dt \\ &= \mathsf{E}_\mathsf{Q} \int_0^{T_a(B)} \frac{1 + |b(s^{-1}(B_t))| + \sigma^2(s^{-1}(B_t))}{\varkappa^2(B_t)}dt \\ &= \mathsf{E}_\mathsf{Q} \int_{-\infty}^0 \frac{1 + |b(s^{-1}(y))| + \sigma^2(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)} L^y_{T_0(B)}(B)dy \\ &\leqslant 2 \int_{-\infty}^0 \frac{1 + |b(s^{-1}(y))| + \sigma^2(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)} |y|dy \\ &= 2 \int_0^a \frac{1 + |b(x)| + \sigma^2(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)} |s(x)|dx \end{aligned} \tag{2.35}$$

(неравенство здесь вытекает из предложения A.10.) По лемме 2.9, это выражение конечно. Доказательство существования теперь завершается так же, как в теореме 2.8а.

Единственность. Доказательство проводится так же, как в теореме 2.8д (iii).

Свойство $\mathsf{E}_\mathsf{P} T_a < \infty$ вытекает из (2.35).

(iii) *Существование.* Те же оценки, что и в (2.35), показывают, что для любого $0 < x < c \leqslant a$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_x} \int_0^{T_c} \bigl(1 + |b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\bigr) ds \leqslant 2 \int_0^c \frac{1 + |b(u)| + \sigma^2(u)}{\rho(u)\sigma^2(u)} |s(u)| du,$$

где P_x — решение с $X_0 = x$, определенное до T_a. Конечность интеграла

$$\int_0^a \frac{1 + |b(u)| + \sigma^2(u)}{\rho(u)\sigma^2(u)} |s(u)| du$$

(см. лемму 2.9) гарантирует существование последовательности строго положительных чисел $a = a_0 > a_1 > \dots$ таких, что $a_n \downarrow 0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n} \int_0^{T_{a_{n-1}}} \bigl(1 + |b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\bigr) ds < \infty, \tag{2.36}$$

где P^n — решение с $X_0 = a_n$, определенное до $T_{a_{n-1}}$.

Положим

$$\mathsf{Q}^n = \mathrm{Law}\Bigl(X_t^{T_{a_{n-1}}} - a_n;\, t \geqslant 0 \mid \mathsf{P}^n\Bigr).$$

Меры Q^n являются вероятностными мерами на $C_0(\mathbb{R}_+)$, где $C_0(\mathbb{R}_+)$ — пространство непрерывных функций $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, обращающихся в нуль в нуле. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \Omega &= C_0(\mathbb{R}_+) \times C_0(\mathbb{R}_+) \times \dots, \\ \mathcal{G} &= \mathcal{B}(C_0(\mathbb{R}_+)) \times \mathcal{B}(C_0(\mathbb{R}_+)) \times \dots, \\ \mathsf{Q} &= \mathsf{Q}^1 \times \mathsf{Q}^2 \times \dots \end{aligned}$$

и обозначим через $Y^{(n)}$ канонический процесс на n-й копии $C_0(\mathbb{R}_+)$. Мы рассматриваем каждый $Y^{(n)}$ как процесс на Ω. Положим $\eta_n = T_{a_{n-1}}(a_n + Y^{(n)})$. Из (2.36) вытекает, что

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^n} \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n} T_{a_{n-1}} < \infty,$$

и поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n < \infty$ Q-п.н. Теперь рассмотрим

$$\tau_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta_k, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Определим процесс $(Z_t;\, t \geqslant 0)$ равенством

$$Z_t = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0, \\ a_n + Y^{(n)}_{t-\tau_n}, & \text{если } \tau_n \leqslant t < \tau_{n-1}, \\ a, & \text{если } t \geqslant \tau_0. \end{cases}$$

Очевидно, Z Q-п.н. непрерывен на $(0,\infty)$. Далее, на каждом интервале $]\!]0,\tau_n[\![$ имеем $Z \leqslant a_n$ Q-п.н. Следовательно, Z Q-п.н. непрерывен на $[0,\infty)$.

Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathrm{Law}(Z_t;\, t \geqslant 0 \mid \mathsf{Q})$, $\mathsf{P} = \widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_{T_a}$. Докажем, что (P, T_a) — решение с $X_0 = 0$. Условия (a) и (b) определения 1.10, очевидно, выполнены. Условие (c) вытекает из равенств

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}_{\mathsf{P}} \int_0^{T_a} \bigl(1 + |b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\bigr) ds \\ &= \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} \int_0^{\tau_0} \bigl(1 + b(Z_s) + \sigma^2(Z_s)\bigr) ds \\ &= \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \bigl(1 + |b(Z_s)| + \sigma^2(Z_s)\bigr) ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n} \int_0^{T_{a_{n-1}}} \bigl(1 + |b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\bigr) ds \end{aligned}$$

и неравенства (2.36).

Проверим выполнение условий (d) и (e). Для $n \in \mathbb{N}$ положим $U^{(n)} = Z^{\tau_n}$ и рекурсивно определим процессы $V^{(n)}$:

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= G(Y^{(1)}, 0, \eta_1), \\ V^{(2)} &= G(Y^{(2)}, V^{(1)}, \eta_2), \\ V^{(3)} &= G(Y^{(3)}, V^{(2)}, \eta_3), \dots, \end{aligned}$$

где G — функция склеивания (см. определение B.8). Используя лемму B.9, можно проверить, что для любого $n \in \mathbb{N}$ процесс

$$N^{(n)}_t = V^{(n)}_t - \int_0^{t \wedge (\eta_1 + \dots + \eta_n)} b(a_n + V^{(n)}_s) ds, \quad t \geqslant 0$$

является $\left(\mathcal{F}_t^{V^{(n)}}, \mathsf{Q}\right)$-локальным мартингалом. Заметим, что τ_n является $\left(\mathcal{F}_t^{U^{(n)}}\right)$-моментом остановки, поскольку $\tau_n = T_{a_n}(U^{(n)})$. Кроме того, $G(U^{(n)}, V^{(n)}, \tau_n) = Z$. По лемме B.9, $G(0, N^{(n)}, \tau_n) \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t^Z, \mathsf{Q})$. Очевидно, $G(0, N^{(n)}, \tau_n) = K^{(n)}$, где

$$K_t^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{если } t < \tau_n, \\ Z_t - a_n - \displaystyle\int_{\tau_n}^{t\wedge\tau_0} b(Z_s)ds, & \text{если } t \geqslant \tau_n. \end{cases}$$

Из неравенства (2.36) и непрерывности Z вытекает, что $K^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{u.p.}} K$, где

$$K_t = Z_t - \int_0^{t\wedge\tau_0} b(Z_s)ds, \quad t \geqslant 0.$$

Согласно лемме B.11, $K \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t^Z, \mathsf{Q})$. Это означает, что процесс

$$M_t = X_t - \int_0^{t\wedge T_a} b(X_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом. Аналогично проверяем, что

$$\langle M\rangle_t = \int_0^{t\wedge T_a} \sigma^2(X_s)ds, \quad t \geqslant 0.$$

В результате, P является решением до T_a.

Единственность. Пусть P — положительное решение до T_a. Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_{T_a}^{-1}$ (Φ задается равенством (B.1)) и для каждого $x \in (0, a]$ рассмотрим меры $\mathsf{Q}_x = \widetilde{\mathsf{P}}(\,\cdot\mid T_x < \infty)$, $\mathsf{R}_x = \mathsf{Q}_x \circ \Theta_{T_x}^{-1}$, где Θ задается равенством (A.4). Рассуждения из доказательства леммы B.7 показывают, что $\mathsf{R}_x|\mathcal{F}_{T_a}$ является решением (2) с $X_0 = x$, определенным до T_a. Следовательно, $\mathsf{R}_x|\mathcal{F}_{T_a} = \mathsf{P}_x$, где P_x — единственное решение с $X_0 = x$, определенное до T_a. С другой стороны, $X^{T_a} = X$ R_x-п.н. Следовательно,

$$\mathsf{R}_x = \mathsf{R}_x \circ \Phi_{T_a}^{-1} = (\mathsf{R}_x|\mathcal{F}_{T_a}) \circ \Phi_{T_a}^{-1} = \mathsf{P}_x \circ \Phi_{T_a}^{-1}, \tag{2.37}$$

откуда видно, что меры R_x определены однозначно.

Аналогично (2.27), проверяем, что

$$\int_0^{T_a} I(X_s = 0)ds = 0 \quad \widetilde{\mathsf{P}}\text{-п.н.}$$

Поскольку P — положительное решение, это равенство показывает, что $T_x \xrightarrow[x\downarrow 0]{\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п.н.}} 0$. Следовательно, меры R_x слабо сходятся к $\widetilde{\mathsf{P}}$ при $x \downarrow 0$. Теперь из равенства (2.37) видно, что мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ (а значит, и P) определена однозначно. □

`Доказательство теоремы 2.8ж.` **(i)** Доказательство проводится так же, как в теореме 2.8е (i).

(ii) Предположим, что существует решение (P, S) такое, что

$$\mathsf{P}\big(\sup_{t\in[0,S]} X_t > c\big) > 0$$

для некоторого $c > 0$. Можем сразу предположить, что случайная величина S ограничена. Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_S^{-1}$ (Φ определяется равенством (B.1)).

Выберем $\delta \in (0, c)$ и рассмотрим процесс

$$X'_t = \delta + \int_0^t I(s \geqslant T_\delta) dX_s, \quad t \geqslant 0.$$

Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 2.8е (i), показывают, что $\widetilde{\mathsf{P}}(\forall t \geqslant 0,\, X'_t > 0) = 1$.

Положим $Y = s(X')$, $\Delta = s(\delta)$. По формуле Ито–Танака и формуле для времен пребывания, $Y \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$ и

$$\langle Y\rangle_t = \int_0^t I(T_\delta \leqslant s \leqslant S)\varkappa^2(Y_s) ds, \quad t \geqslant 0$$

($\varkappa$ задано равенством (2.14)).

Рассмотрим

$$A_t = \begin{cases} \langle Y\rangle_t, & \text{если } t < S, \\ \infty, & \text{если } t \geqslant S, \end{cases}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},$$

$$V_t = Y_{\tau_t}, \quad t \geqslant 0.$$

Процесс $V-\Delta$ является броуновским движением, выходящим из нуля и остановленным в момент $\eta = A_{S-}$. Имеем

$$\mathsf{P}(\eta > T_\gamma(V)) = \mathsf{P}\big(\sup_{t\in[0,S]} X_t > c\big) > 0.$$

Рассмотрим функцию

$$g(y) = \frac{1+|b(s^{-1}(y))|}{\varkappa^2(y)} I(y<\gamma).$$

Из условий теоремы вытекает, что

$$\forall \lambda < \gamma,\ \int_{-\infty}^{\lambda} |y-\gamma| g(y)dy = \infty. \tag{2.38}$$

Пусть $(W_t;\, t \geqslant 0)$ — двумерное броуновское движение, выходящее из нуля. Множество

$$D = \Big\{\omega : \forall\lambda<\gamma,\ \int_{-\infty}^{\lambda} |W_{\gamma-y}(\omega)|^2 g(y)dy = \infty\Big\}$$

принадлежит хвостовой σ-алгебре $\mathcal{X} = \bigcap_{t>0}\sigma(W_s;\, s\geqslant t)$. Из закона 0–1 Блюменталя и свойства обращения времени для броуновского движения вытекает, что $\mathsf{P}(D)$ равно 0 или 1. Учитывая свойство (2.38) и предложение A.34, заключаем, что $\mathsf{P}(D)=1$. Используя предложение A.10 (i), получаем

$$\begin{aligned}\int_0^{T_\gamma(\Delta+B)} g(\Delta+B_s)ds &\geqslant \int_\Delta^\gamma L^{y-\Delta}_{T_{\gamma-\Delta}(B)}(B)g(y)dy\\ &\overset{\text{law}}{=} \int_\Delta^\gamma |W_{\gamma-y}|^2 g(y)dy \xrightarrow[\Delta\to-\infty]{\mathsf{P}} \int_{-\infty}^\gamma |W_{\gamma-y}|^2 g(y)dy \overset{\text{п.н.}}{=} \infty,\end{aligned}$$

где B — броуновское движение, выходящее из нуля. Доказательство теперь завершается так же, как в теореме 2.8в (i).

(iii) *Существование.* Определим процесс Y равенством (2.34), где B — $(\mathcal{G}_t)$-броуновское движение, выходящее из точки $s(x_0)$, заданное на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{G},(\mathcal{G}_t),\mathsf{P})$, а $\varkappa$ определено в (2.14). Положим $Z=s^{-1}(Y)$. Рассуждая так же, как при доказательстве существования в теореме 2.8а, проверяем, что $A_{T_0(B)-}=T_0(Y)$

Q-п.н. Оценки, использованные в (2.35), показывают, что для любого $c \in (0, x_0)$ выполнено

$$\int_0^{T_{a,c}(Z)} \big(1 + |b(Z_t)| + \sigma^2(Z_t)\big)dt < \infty \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.} \tag{2.39}$$

Далее, $T_a(Z) = T_0(Y) < \infty$ Q-п.н. Устремляя $c \to 0$ в (2.39), получаем

$$\int_0^{T_a(Z)} \big(1 + |b(Z_t)| + \sigma^2(Z_t)\big)dt < \infty \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.} \tag{2.40}$$

Доказательство существования теперь завершается так же, как в теореме 2.8а.

Единственность. Доказательство проводится так же, как в теореме 2.8д (iii).

Свойство $T_a < \infty$ P-п.н. следует из неравенства (2.40). □

`Доказательство теоремы 2.5а.` Поскольку d — регулярная точка, существуют константы $d_1 < d < d_2$ такие, что

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2} \in L^1_{\text{loc}}([d_1, d_2]).$$

Будем использовать обозначения из доказательства теоремы 2.8а. Без ограничения общности, можем предположить, что $d_1 = 0$, $d_2 = a$.

Предположим сначала, что $x_0 = d$. Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \operatorname{Law}\big(X_t^{T_{0,a}};\, t \geqslant 0 \mid \mathsf{P}\big)$. Тогда $\widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_{T_{0,a}}$ является решением до $T_{0,a}$. По теореме 2.8а, эта мера единственна. Следовательно, $\widetilde{\mathsf{P}} = \operatorname{Law}(Z_t;\, t \geqslant 0)$, где $Z = s^{-1}(Y)$, а Y определяется равенством (2.17). Согласно формуле Ито–Танака и предложению А.17,

$$\begin{aligned}(Y_t - s(x_0))^+ = (B_{\tau_t} - s(x_0))^+ &= \int_0^{\tau_t} I(B_s > s(x_0))dB_s + \frac{1}{2}L_{\tau_t}^{s(x_0)}(B)\\ &= \int_0^t I(B_{\tau_s} > s(x_0))dB_{\tau_s} + \frac{1}{2}L_{\tau_t}^{s(x_0)}(B)\\ &= \int_0^t I(Y_s > s(x_0))dY_s + \frac{1}{2}L_{\tau_t}^{s(x_0)}(B), \quad t \geqslant 0.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(Y_t - s(x_0))^+ = \int_0^t I(Y_s > s(x_0))dY_s + \frac{1}{2}L_t^{s(x_0)}(Y), \quad t \geqslant 0,$$

и следовательно, $L_t^{s(x_0)}(Y) = L_{\tau_t}^{s(x_0)}(B)$.

Применяя формулу Ито–Танака к функции $y \mapsto s^{-1}(y \vee s(x_0))$ и учитывая (2.21), (2.22), получаем

$$\begin{aligned} s^{-1}(Y_t \vee s(x_0)) = x_0 &+ \int_0^t \frac{1}{\rho(s^{-1}(Y_s))} I(Y_s > s(x_0))dY_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2b(s^{-1}(Y_s))}{\varkappa^2(Y_s)} I(Y_s > s(x_0))d\langle Y\rangle_s + \frac{1}{2\rho(x_0)}L_t^{s(x_0)}(Y) \\ &= x_0 + \int_0^t I(Z_s > x_0)dZ_s + \frac{1}{2\rho(x_0)}L_t^{s(x_0)}(Y), \quad t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.41}$$

где $Z = s^{-1}(Y)$. Применяя формулу Ито–Танака к функции $x \mapsto x \vee s(x_0)$, получаем

$$s^{-1}(Y_t \vee s(x_0)) = Z_t \vee x_0 = x_0 + \int_0^t I(Z_s > x_0)dZ_s + \frac{1}{2}L_t^{x_0}(Z), \quad t \geqslant 0.$$

Учитывая (2.41), получаем

$$L_t^{x_0}(Z) = \frac{1}{\rho(x_0)}L_t^{s(x_0)}(Y) = \frac{1}{\rho(x_0)}L_{\tau_t}^{s(x_0)}(B), \quad t \geqslant 0.$$

Для любого $t > 0$ имеем $\tau_t > 0$ п.н. Из предложения A.8 вытекает, что для любого $t > 0$ выполнено $L_t^{s(x_0)}(B) > 0$ п.н. Следовательно, для любого $t > 0$ выполнено $L_t^{x_0}(Z) > 0$ п.н. Это означает, что $L_t^{x_0}(X^{T_{0,a}}) > 0$ P-п.н. Используя очевидное равенство $L_t^{x_0}(X^{T_{0,a}}) = (L_t^{x_0}(X))^{T_{0,a}}$, получаем: $L_t^{x_0}(X) > 0$ P-п.н для любого $t > 0$. Принимая во внимание (2.4), получаем требуемый результат.

Предположим теперь, что $x_0 \neq d$. Положим $\mathsf{Q} = \mathsf{P}(\,\cdot \mid T_d < \infty)$, $\mathsf{R} = \mathsf{Q} \circ \Theta_{T_d}^{-1}$, где Θ задается равенством (B.2). По лемме B.7, R является решением уравнения (2) с $X_0 = d$. Утверждение, доказанное выше (для случая $x_0 = d$), вместе с следствием A.7 показывают, что для любого $t > 0$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t I(d \leqslant X_s < d + \varepsilon)\sigma^2(X_s)ds > 0 \quad \mathsf{R}\text{-п.н.}$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{T_d}^{t+T_d} I(d \leqslant X_s < d + \varepsilon)\sigma^2(X_s)ds > 0 \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.}$$

Это означает, что

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{T_d}^{t+T_d} I(d \leqslant X_s < d + \varepsilon)\sigma^2(X_s)ds > 0 \quad \mathsf{P}\text{-п.н. на } \{T_d < \infty\}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t+T_d} I(d \leqslant X_s < d + \varepsilon)\sigma^2(X_s)ds > 0 \quad \mathsf{P}\text{-п.н. на } \{T_d < \infty\}.$$

Применяя еще раз следствие A.7, получаем требуемый результат. $\square$

Глава 3

Двусторонняя классификация и марковские решения

На протяжении этой главы будем рассматривать СДУ (2) и предполагать, что b и σ измеримы, причем $\sigma(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Через X будем обозначать канонический процесс на $C(\mathbb{R}_+)$ или $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ (см. определение 1.9), а через $(\mathcal{F}_t)$ — каноническую фильтрацию. Решения, рассматриваемые в этой главе, являются локальными (т.е. решениями в смысле определений 1.10, 1.12).

§ 3.1 Двусторонняя классификация: результаты

Определение 3.1. Изолированная особая точка имеет *тип* (i, j), если она имеет левый тип i и правый тип j. (*Левый тип* изолированной особой точки определяется аналогично ее правому типу на основании поведения коэффициентов уравнения в ее левой полуокрестности.)

Предположим, что нуль — изолированная особая точка. Тогда существуют числа $a < 0 < c$ такие, что

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}\bigl([a, c] \setminus \{0\}\bigr). \tag{3.1}$$

Если нуль имеет правый тип 0, то

$$\int_0^c \frac{1+|b(x)|}{\sigma^2(x)}dx < \infty.$$

Если же правый тип нуля — один из $1,\dots,6$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \frac{1+|b(x)|}{\sigma^2(x)}dx = \infty.$$

(Это легко видеть из рис. 2.2.)

Если бы нуль имел тип $(0,0)$, то $(1+|b|)/\sigma^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(0)$, т.е. в этом случае нуль не являлся бы изолированной особой точкой. Для остальных 48 комбинаций правых и левых типов $(1+|b|)/\sigma^2 \notin L^1_{\mathrm{loc}}(0)$. Итак, изолированная особая точка может иметь один из 48 возможных типов.

Теорема 3.2а. *Предположим, что нуль имеет тип* (i,j) *с* $i = 0,1,4,5,6$, $j = 0,1,4,5,6$ *(при этом случай* $i=j=0$ *исключается). Тогда для любого решения* (P,S) *имеем* $S \leqslant T_0$ P*-п.н.*

Теорема 3.2б. *Предположим, что нуль имеет тип* (i,j) *с* $i=0,1$, $j=2,3$.

(i) *Для любого решения* (P,S) *имеем* $X \geqslant 0$ *на* $[\![T_0,S]\!]$ P*-п.н.*

(ii) *Если* $x_0 \in [a,c]$, *то существует единственное решение* P *до* $T_{a,c}$.

Теорема 3.2в. *Предположим, что нуль имеет тип* $(2,2)$. *Тогда для любого* $x_0 \in (a,c)$ *существуют различные решения до* $T_{a,c}$.

Теорема 3.2г. *Предположим, что нуль имеет тип* $(2,3)$.

(i) *Для любого решения* (P,S) *имеем* $X > 0$ *на* $]\!]T_{0+},S]\!]$ P*-п.н., где* $T_{0+} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t > 0\}$.

(ii) *Если* $x_0 \in (a,0]$, *то существуют различные решения до* $T_{a,c}$.

(iii) *Если* $x_0 \in (0,c]$, *то существует единственное решение до* $T_{a,c}$, *и оно строго положительно.*

Теорема 3.2д. *Предположим, что нуль имеет тип* $(3,3)$.

(i) *Если* $x_0 \in [a, 0)$, *то существует единственное решение до* $T_{a,c}$, *и оно строго отрицательно.*

(ii) *Если* $x_0 \in (0, c]$, *то существует единственное решение до* $T_{a,c}$, *и оно строго положительно.*

(iii) *Если* $x_0 = 0$, *то существуют различные решения до* $T_{a,c}$. *Их можно описать следующим образом. Если* P *— решение до* $T_{a,c}$, *то существует* $\lambda \in [0,1]$ *такое, что* $\mathsf{P} = \lambda \mathsf{P}^- + (1-\lambda)\mathsf{P}^+$, *где* P^- *— единственное отрицательное решение до* $T_{a,c}$, *а* P^+ *— единственное положительное решение до* $T_{a,c}$.

Мы не приводим здесь утверждений, касающихся типов (i, j) с $i = 4, 5, 6$, $j = 2, 3$, поскольку для этих типов поведение решения в двусторонней окрестности соответствующей точки ясно из односторонней классификации и нет дополнительных эффектов, происходящих из двусторонней комбинации типов.

Дадим теперь неформальное описание приведенных выше результатов.

Если нуль имеет тип (i, j) с $i = 0, 1, 4, 5, 6$, $j = 0, 1, 4, 5, 6$ (случай $i = j = 0$ исключается), то после попадания решения в нуль, оно не может идти дальше ни в отрицательном, ни в положительном направлении. Таким образом, решение может быть определено максимум до момента T_0.

Если нуль имеет тип (i, j) с $i = 0, 1$, $j = 2, 3$, то решение, выходящее из строго отрицательной точки, может достичь нуля. После этого момента оно не может идти в отрицательном направлении, но может идти в положительном направлении. Итак, "в окрестности нуля" существует и притом единственное решение, проходящее через нуль в положительном направлении.

Если нуль имеет тип (i, j) с $i = 4, 5, 6$, $j = 2, 3$, то поведение решения в окрестности нуля понятно из односторонней классификации.

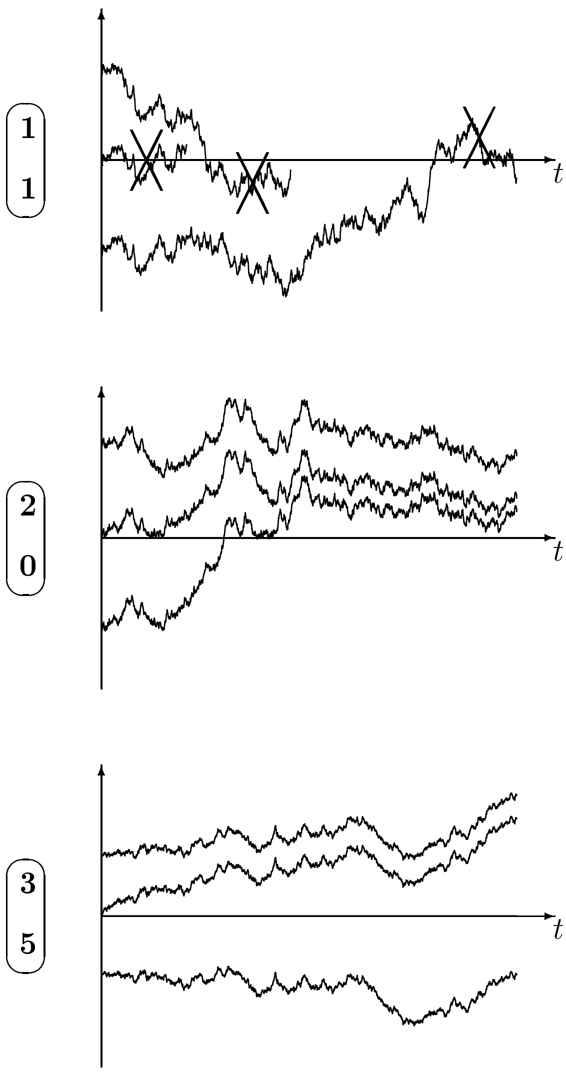


Рис. 3.1. Поведение решения для различных типов изолированных особых точек. Рисунки показывают смоделированные на компьютере траектории решений с различными начальными точками. Верхний рисунок иллюстрирует теорему 3.2а. Он соответствует случаю, когда нуль имеет тип (1,1). Символы ”$\times$” показывают, что решение не может быть продолжено после достижения нуля. Средний рисунок иллюстрирует теорему 3.2б. Он соответствует случаю, когда нуль имеет тип (0,2). Нижний рисунок иллюстрирует ситуацию, когда нуль имеет тип (i, j) с $i = 4, 5, 6$, $j = 2, 3$. Это рисунок соответствует случаю, когда нуль имеет тип (5,3).

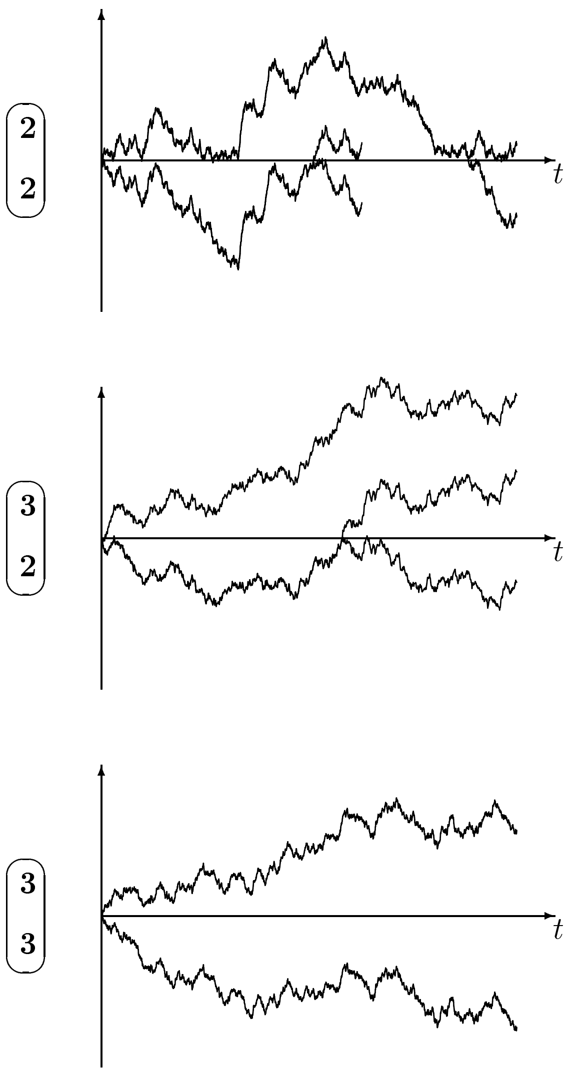


Рис. 3.2. Поведение решений для различных видов точек ветвления, т.е. точек типа (i, j) с $i = 2, 3$, $j = 2, 3$. Рисунки показывают смоделированные траектории "ветвящихся" решений. Верхний рисунок показывает 4 различных решения, выходящих из нуля, для случая, когда нуль имеет тип $(2, 2)$. Средний и нижний рисунки строятся аналогично для случаев, когда нуль имеет тип $(2, 3)$ и $(3, 3)$, соответственно.

Именно, решение, выходящее из строго положительной точки, может достичь нуля при $j = 2$ и не может при $j = 3$; в любом случае оно не может войти в отрицательную полуось; решение, выходящее из строго отрицательной точки, не может достичь нуля.

Если нуль имеет тип (i, j) с $i = 2, 3$, $j = 2, 3$, то существует (по крайней мере, локально) как положительное, так и отрицательное решение, выходящее из нуля.

Если нуль имеет тип $(2, 2)$, то решение, выходящее из любой точки в достаточно малой окрестности нуля, может достичь нуля со строго положительной вероятностью. После попадания в нуль оно может идти дальше как в положительном, так и в отрицательном направлении. Таким образом, для любой начальной точки из некоторой окрестности нуля существуют различные (локальные) решения.

Если нуль имеет тип $(2, 3)$, то те же рассуждения показывают, что для любой начальной точки из некоторой левой полуокрестности нуля существуют различные (локальные) решения. Однако решения, выходящие из строго положительной точки, не достигают нуля, так что наличие этой "плохой" точки не нарушает единственности решений с $x_0 > 0$. (Конечно, это не означает, что решение с $x_0 > 0$ единственно, поскольку могут иметься точки типов $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ и $(3, 3)$, отличные от нуля.)

Если нуль имеет тип $(3, 3)$, то решения, выходящие не из нуля, не достигают нуля, так что наличие этой "плохой" точки не нарушает единственности решений с $x_0 \neq 0$.

§ 3.2 Двусторонняя классификация: доказательства

`Доказательство теоремы 3.2б.` **(i)** Мы докажем это утверждение для типов (i, j) с $i = 0, 1$, $j = 1, \dots, 6$. Если $i = 1$, то утверждение вытекает из теоремы 2.8в (i). Предположим теперь, что $i = 0$. Пусть (P, S)

— решение. Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_S^{-1}$ (Φ задается равенством (B.1)) и рассмотрим функции

$$\rho_-(x) = \exp\left(-\int_a^x \frac{2b(x)}{\sigma^2(x)}dy\right), \quad x \in [a,0], \tag{3.2}$$

$$s_-(x) = -\int_x^0 \rho(y)dy, \quad x \in [a,0], \tag{3.3}$$

$$f(x) = \begin{cases} k_1(x-a) + s_-(a), & \text{если } x < a, \\ s_-(x), & \text{если } a \leqslant x \leqslant 0, \\ k_2 x, & \text{если } x > 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

где константы k_1 и k_2 выбираются таким образом, что f дифференцируема в точках a и 0 (такие константы существуют, поскольку нуль имеет левый тип 0). По формуле Ито–Танака и формуле для времен пребывания, процесс $Y = f(X)$ является $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$-семимартингалом с разложением

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^{t\wedge S} \bigl[k_1 I(Y_s < s_-(a)) b(f^{-1}(Y_s)) + k_2 I(Y_s > 0) b(f^{-1}(Y_s))\bigr] ds + N_t \\ &= Y_0 + \int_0^{t\wedge S} \varphi(Y_s)ds + N_t, \quad t \geqslant 0, \end{aligned}$$

где $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$ и

$$\langle N\rangle_t = \int_0^{t\wedge S} (f'(f^{-1}(Y_s)))^2 \sigma^2(f^{-1}(Y_s))ds = \int_0^{t\wedge S} \psi^2(Y_s)ds, \quad t \geqslant 0.$$

Поскольку правый тип нуля — один из $1,\dots,6$, имеем для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \frac{1+|\varphi(y)|}{\psi^2(y)}dy = \infty.$$

Отсюда, используя рассуждения из доказательства теоремы 2.4, получаем $L_t^0(Y) = 0$ $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н. По формуле Ито–Танака,

$$\begin{aligned} Y_t^- &= Y_0^- + \int_0^t I(Y_s \leqslant 0)dY_s \\ &= Y_0^- + \int_0^{t\wedge S} I(Y_s \leqslant 0)\varphi(Y_s)ds + \int_0^t I(Y_s \leqslant 0)dN_s, \end{aligned}$$

где использовано обозначение $x^- = x \wedge 0$. Выберем $\Delta \in (f(a), 0)$ и рассмотрим $T = \inf\{t \geqslant T_0(Y) : Y_t = \Delta\}$. Функция φ равна нулю на $(s_-(a), 0)$. Поэтому процесс

$$Z_t = \int_0^t I(T_0(Y) \leqslant s < T) dY_s^-, \quad t \geqslant 0$$

является $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$-локальным мартингалом. Поскольку Z отрицателен и $Z_0 = 0$, получаем, что $Z = 0$ $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н. Следовательно, после момента $T_0(Y)$ процесс Y не достигает никакого уровня $\Delta < 0$. Это приводит к требуемому утверждению.

(ii) *Существование.* Если $x_0 \in [0, c]$, то по теоремам 2.8б и 2.8е, существует решение до T_c. Очевидно, его сужение на $\mathcal{F}_{T_{a,c}}$ является решением до $T_{a,c}$.

Предположим теперь, что $x_0 \in [a, 0)$. Тогда существует решение Q, определенное до $T_{a,0}$. Пусть R_0 — положительное решение с $X_0 = 0$, определенное до T_c. Положим $\widetilde{\mathsf{Q}} = \mathsf{Q} \circ \Phi_{T_{a,0}}^{-1}$, $\widetilde{\mathsf{R}}_0 = \mathsf{R}_0 \circ \Phi_{T_c}^{-1}$. Будем рассматривать $\widetilde{\mathsf{Q}}$ как меру на $C(\mathbb{R}_+)$, а $\widetilde{\mathsf{R}}_0$ как меру на $C_0(\mathbb{R}_+)$. Обозначим через $\widetilde{\mathsf{P}}$ образ меры $\widetilde{\mathsf{Q}} \times \widetilde{\mathsf{R}}_0$ при отображении

$$C(\mathbb{R}_+) \times C_0(\mathbb{R}_+) \ni (\omega_1, \omega_2) \longmapsto G(\omega_1, \omega_2, T_0(\omega_1)) \in C(\mathbb{R}_+),$$

где G — функция склеивания. Используя лемму B.9, можно проверить, что мера $\mathsf{P} = \widetilde{\mathsf{P}} | \mathcal{F}_{T_{a,c}}$ является решением до $T_{a,c}$.

Единственность. Если $x_0 \in [0, c]$, то единственность вытекает из утверждения (i) этой теоремы и результатов параграфа 2.3.

Предположим теперь, что $x_0 \in [a, 0)$. Пусть P — решение, определенное до $T_{a,c}$. Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_{T_{a,c}}^{-1}$. Обозначим через P_0 (единственное) решение с $X_0 = 0$, определенное до $T_{a,c}$. Положим $\widetilde{\mathsf{P}}_0 = \mathsf{P}_0 \circ \Phi_{T_{a,c}}^{-1}$. Рассмотрим

$$\Omega = C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{G} = \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \times \mathcal{F}_t, \quad \mathsf{Q} = \widetilde{\mathsf{P}} \times \widetilde{\mathsf{P}}_0.$$

Произвольная точка ω из Ω имеет вид (ω_1, ω_2). Определим процессы

$$Y_t(\omega) = \omega_1(t \wedge T_{a,0}(\omega_1)), \quad t \geqslant 0,$$

$$Z_t(\omega) = \begin{cases} \omega_1(t + T_0(\omega_1)), & \text{если } T_0(\omega_1) < \infty, \\ \omega_2(t), & \text{если } T_0(\omega_1) = \infty. \end{cases}$$

Положим $\mathcal{H} = \sigma(Y_t;\, t \geqslant 0)$. Обозначим через $(\mathsf{Q}_\omega)_{\omega \in \Omega}$ версию Q-условного распределения процесса $(Z_t;\, t \geqslant 0)$ относительно σ-алгебры $\mathcal{H}$. Докажем теперь, что для Q-п.в. ω меры $\mathsf{Q}_\omega|\mathcal{F}_{T_{a,c}}$ является решением уравнения (2) с $X_0 = 0$, определенным до $T_{a,c}$.

Условия (a), (b) определения 1.10, очевидно, выполнены. Далее, для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^{t \wedge T_{a,c}(Z)} \bigl(|b(Z_s)| + \sigma^2(Z_s)\bigr) ds < \infty \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.}$$

Следовательно, для Q-п.в. ω имеем

$$\forall t \geqslant 0, \ \int_0^{t \wedge T_{a,c}} \bigl(|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\bigr) ds < \infty \quad \mathsf{Q}_\omega\text{-п.н.}$$

Таким образом, условие (c) определения 1.10 выполнено для Q-п.в. ω.

Проверим теперь, что для Q-п.в. ω мера $\mathsf{Q}_\omega|\mathcal{F}_{T_{a,c}}$ удовлетворяет условию (d) определения 1.10. Рассмотрим процесс

$$N_t = Z_t - \int_0^{t \wedge T_c(Z)} b(Z_s) ds, \quad t \geqslant 0$$

и моменты остановки $S_m(N) = \inf\{t \geqslant 0 : |N_t| \geqslant m\}$. Для любых $s \leqslant t$, $A \in \mathcal{F}_s$ и $B \in \mathcal{H}$ имеем

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\bigl[\bigl(N_t^{S_m(N)} - N_s^{S_m(N)}\bigr) I(\{Z \in A\} \cap B)\bigr] = 0.$$

(Это вытекает из построения Q и теоремы об остановке.) Следовательно, для Q-п.в. ω

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}_\omega}\bigl[\bigl(M_t^{S_m(M)} - M_s^{S_m(M)}\bigr) I(X \in A)\bigr] = 0,$$

где

$$M_t = X_t - \int_0^{t\wedge T_{a,c}} b(X_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

и $S_m(M) = \inf\{t \geqslant 0 : |M_t| \geqslant m\}$. В результате, для Q-п.в. ω выполнено $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \mathsf{Q}_\omega)$.

Аналогично проверяем, что для Q-п.в. ω мера $\mathsf{Q}_\omega|\mathcal{F}_{T_{a,c}}$ удовлетворяет условию (e) определения 1.10. Применяя теперь теоремы 2.8а, 2.8в, заключаем, что для Q-п.в. ω выполнено $\mathsf{Q}_\omega|\mathcal{F}_{T_{a,c}} = \mathsf{P}_0$. Отсюда вытекает, что процесс $Z^{T_{a,c}(Z)}$ независим с $\mathcal{H}$. Поскольку $Z = Z^{T_{a,c}(Z)}$ Q-п.н., получаем, что Z независим с $\mathcal{H}$.

Полученные результаты показывают, что мера $\mathrm{Law}(X_t^1;\, t \geqslant 0 \mid \mathsf{Q})$ совпадает со "склеенной" мерой, построенной в доказательстве существования. Это означает, что мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ определена однозначно. Следовательно, мера $\mathsf{P} = \widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_{T_{a,c}}$ определена однозначно. □

`Доказательство теоремы 3.2а.` Из доказательства теоремы 3.2б (i) и результатов параграфа 2.3 видно, что для любого решения (P, S) имеем $X = 0$ на $[\![T_0, S]\!]$ P-п.н. С другой стороны, квадратическая вариация

$$\langle X\rangle_t = \int_0^{t\wedge S} \sigma^2(X_s)ds, \quad t \geqslant 0$$

строго возрастает на $[\![0, S]\!]$, поскольку $\sigma^2 > 0$. Это дает требуемое утверждение. □

`Доказательство теоремы 3.2в.` Без ограничения общности, предположим, что $x_0 \in (a, 0]$. Из теоремы 2.8б вытекает, что существует отрицательное решение P, определенное до $T_{a,c}$.

Также существует положительное решение P_0 с $X_0 = 0$, определенное до $T_{a,c}$. Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P}\circ\Phi_{T_{a,c}}^{-1}$, $\widetilde{\mathsf{P}}_0 = \mathsf{P}_0\circ\Phi_{T_{a,c}}^{-1}$ (Φ задано равенством (B.1)) и обозначим через $\widetilde{\mathsf{P}}'$ образ меры $\widetilde{\mathsf{P}} \times \widetilde{\mathsf{P}}_0$ при отображении

$$C(\mathbb{R}_+) \times C_0(\mathbb{R}_+) \ni (\omega_1, \omega_2) \longmapsto G(\omega_1, \omega_2, T_0(\omega_1)) \in C(\mathbb{R}_+),$$

где G — функция склеивания. Используя лемму B.9, можем проверить, что мера $\mathsf{P}' = \widetilde{\mathsf{P}}'|\mathcal{F}_{T_{a,c}}$ является решением уравнения (2) до $T_{a,c}$. Кроме того, P' не является отрицательным, так что $\mathsf{P}' \neq \mathsf{P}$. □

`Доказательство теоремы 3.2г.` **(i)** Пусть (P, S) — решение. Для $0 \leqslant \alpha < \beta < c$ положим $T_\alpha^\beta = \inf\{t \geqslant T_\beta : X_t = \alpha\}$. Предположим, что существует $\beta \in (0, c)$ такое, что $\mathsf{P}(T_0^\beta < \infty,\ T_0^\beta \leqslant S) > 0$. Тогда найдется $\alpha \in (0, \beta)$ со свойством

$$\mathsf{P}\big(T_0^\beta < \infty,\ T_0^\beta \leqslant S,\ \text{и}\ \sup\nolimits_{t \in [T_\alpha^\beta, T_0^\beta]} X_t \leqslant c\big) > 0.$$

Используя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.8е (i), приходим к противоречию. Итак, для любого $\beta \in (0, c)$ имеем $\mathsf{P}(T_0^\beta < \infty,\ T_0^\beta \leqslant S) = 0$. Это приводит к требуемому утверждению.

(ii) Доказательство проводится так же, как в теореме 3.2в.

(iii) Это утверждение вытекает из теоремы 2.8е (ii). □

`Доказательство теоремы 3.2д.` **(i)**,**(ii)** Эти утверждения вытекают из теоремы 2.8е (ii).

(iii) Пусть P — решение до $T_{a,c}$. Доказательство теоремы 3.2г (i) показывает, что

$$\mathsf{P}(\exists t \in (T_{0+}, T_{a,c}] : X_t \leqslant 0) = 0,$$
$$\mathsf{P}(\exists t \in (T_{0-}, T_{a,c}] : X_t \geqslant 0) = 0,$$

где $T_{0-} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t < 0\}$. Далее, $T_{0+} \wedge T_{0-} = 0$ P-п.н., поскольку $\sigma \neq 0$. Итак, $\mathsf{P}(A^+ \cup A^-) = 1$, где

$$A^+ = \big\{\omega \in \overline{C}(\mathbb{R}_+) : \omega(0) = 0 \text{ и } \omega > 0 \text{ на } (0, T_{a,c}(\omega)]\big\},$$
$$A^- = \big\{\omega \in \overline{C}(\mathbb{R}_+) : \omega(0) = 0 \text{ и } \omega < 0 \text{ на } (0, T_{a,c}(\omega)]\big\}.$$

Предположим теперь, что P не совпадает ни с P^-, ни с P^+. Тогда $\mathsf{P}(A^+) > 0$ и условная вероятность $\mathsf{P}(\,\cdot \mid A^+)$ является решением до $T_{a,c}$ (заметим, что $A^+ \in \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_\varepsilon$). Кроме того, это решение положительно, так что оно совпадает с P^+. Аналогично доказываем, что $\mathsf{P}(\,\cdot \mid A^-) = \mathsf{P}^-$. Итак, $\mathsf{P} = \lambda\mathsf{P}^- + (1-\lambda)\mathsf{P}^+$ с $\lambda = \mathsf{P}(A^-)$. □

§ 3.3 Точки ветвления: немарковские решения

Определение 3.3. *Точкой ветвления* назовем изолированную особую точку, имеющую один из типов $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,2)$ или $(3,3)$.

Точки ветвления могут быть охарактеризованы следующим утверждением.

Лемма 3.4. *Пусть нуль — изолированная особая точка. Она является точкой ветвления, если и только если существуют и положительное решение, и отрицательное решение с* $X_0 = 0$, *определенные до* $T_{a,c}$. (*Числа* a *и* c *взяты из* (3.1).)

Это утверждение вытекает из результатов параграфа 2.3.

Ниже в этом параграфе будем обозначать через X канонический процесс на $C(\mathbb{R}_+)$, а через $(\mathcal{F}_t)$ — каноническую фильтрацию на этом пространстве. Положим $\mathcal{F} = \bigvee_{t\geqslant 0} \mathcal{F}_t$. Для $s \geqslant 0$ *оператор сдвига* $\Theta_s : C(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$ определяется равенством

$$(\Theta_s \omega)(t) = \omega(s+t), \quad t \geqslant 0.$$

Определение 3.5. Мера P на $\mathcal{F}$ обладает *марковским свойством*, если для любого $t \geqslant 0$ и любой положительной $\mathcal{F}$-измеримой функции Ψ

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}}[\Psi \circ \Theta_t \mid \mathcal{F}_t] = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}[\Psi \circ \Theta_t \mid \sigma(X_t)].$$

Если СДУ (2) обладает единственным глобальным решением для любого $x_0 \in \mathbb{R}$, то семейство этих решений является марковским (см. [68; Th. 6.2] или [56; Th. 18.11]; см. также [47; Cor. 4.38]). Приводимый ниже пример показывает, что наличие точек ветвления приводит к появлению немарковских решений.

Пример 3.6. (немарковские решения; СДУ для процессов Бесселя). *Рассмотрим СДУ*

$$dX_t = \frac{\delta-1}{2X_t} I(X_t \neq 0)dt + dB_t, \quad X_0 = x_0 \tag{3.5}$$

с $1 < \delta < 2$. *Возьмем* $x_0 > 0$ *и обозначим через* P *положительное решение* (3.5) (*это распределение процесса Бесселя размерности* δ, *выходящего из точки* x_0). *Рассмотрим отображение*

$$C(\mathbb{R}_+) \ni \omega \longmapsto \omega' \in C(\mathbb{R}_+),$$

заданное равенством

$$\omega'(t) = \begin{cases} \omega(t), & \text{если } t \leqslant T_0(\omega), \\ \omega(t), & \text{если } t > T_0(\omega) \text{ и } \omega(T_0(\omega)/2) > 1, \\ -\omega(t), & \text{если } t > T_0(\omega) \text{ и } \omega(T_0(\omega)/2) \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда образ P' *меры* P *при этом отображении является немарковским решением* (3.5).

Утверждение проверяется непосредственно.

Замечания. (i) Таким же методом, как в примере 3.6, можем построить (по крайней мере, локальное) немарковское решение для произвольного СДУ, обладающего изолированной особой точкой типа $(2,2)$, $(2,3)$ или $(3,2)$. Точки типа $(3,3)$ не приводят к появлению немарковских решений (это вытекает из теоремы 3.2д).

(ii) Упомянем другой способ построения немарковских решений одномерных СДУ. Рассмотрим уравнение

$$dX_t = |X_t|^{\alpha} dB_t, \quad X_0 = 0 \tag{3.6}$$

с $0 < \alpha < 1/2$. Этот пример был впервые рассмотрен И.В. Гирсановым [9]. СДУ (3.6) обладает различными решениями (см. пример 1.34). Для того, чтобы построить немарковское решение уравнения (3.6), выпусти решение из точки $x_0 \neq 0$. В момент, когда оно попадет в нуль, задержим его в нуле на время, зависящее от прошлого траектории, а затем позволим решению выйти из нуля. Этот способ построения немарковских решений хорошо известен (см. [46], [47] или [20; с. 79]). На самом деле, тот же прием можно применить и к СДУ

$$dX_t = I(X_t \neq 0)dB_t, \quad X_0 = 0. \tag{3.7}$$

Для обоих примеров (3.6), (3.7) важно, что σ обнуляется в нуле. С другой стороны, в примере 3.6 $\sigma \equiv 1$.

§ 3.4 Точки ветвления: строго марковские решения

На протяжении этого параграфа считаем, что выполнено условие (3.1).

Рассмотрим сначала случай, когда нуль имеет тип **(3,3)**. В этом случае нам уже известна структура решений в окрестности нуля. Действительно, из теоремы 3.2д следует, что если $(\mathsf{P}_x, T_{a,c})$ — решение с $X_0 = x$, то существует $\lambda \in [0,1]$ такое, что

$$\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x^\lambda = \begin{cases} \mathsf{P}_x^-, & \text{если } x \in [a,0), \\ \lambda\mathsf{P}_0^- + (1-\lambda)\mathsf{P}_0^+, & \text{если } x = 0, \\ \mathsf{P}_x^+, & \text{если } x \in (0,c]. \end{cases} \tag{3.8}$$

Здесь P_x^- обозначает единственное отрицательное решение, определенное до $T_{a,c}$; P_x^+ обозначает единственное положительное решение, определенное до $T_{a,c}$. Положим $\widetilde{\mathsf{P}}_x^\lambda = \mathsf{P}_x^\lambda \circ \Phi_{T_{a,c}}^{-1}$ (Φ задается равенством (B.1)). Если λ равно 0 или 1, то $(\widetilde{\mathsf{P}}_x^\lambda)_{x\in[a,c]}$ является строго марковским семейством (см. определение A.25). При $\lambda \in (0,1)$ это семейство не обладает строго марковским свойством. Для проверки этого достаточно рассмотреть $(\mathcal{F}_t^+)$-момент остановки $T_{0+} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t > 0\}$ и функцию $\Psi(\omega) = I(\forall t \geqslant 0,\, \omega(t) \geqslant 0)$. Итак, приходим к следующей теореме.

Теорема 3.7а. *Пусть нуль имеет тип* $(3,3)$. *Для произвольного* $x \in [a,c]$, *обозначим через* $(\mathsf{P}_x, T_{a,c})$ *решение с* $X_0 = x$. *Положим* $\widetilde{\mathsf{P}}_x = \mathsf{P}_x \circ \Phi_{T_{a,c}}^{-1}$ *и предположим, что семейство* $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[a,c]}$ *обладает строго марковским свойством. Тогда либо* $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x^0$ *для любого* $x \in [a,c]$, *либо* $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x^1$ *для любого* $x \in [a,c]$, *где* P_x^0 *и* P_x^1 *заданы равенством* (3.8).

Рассмотрим теперь случай, когда нуль имеет тип **(2,3)**. Для $x \in [a,0]$ существует единственное отрицательное решение P_x^-, определенное до $T_{a,c}$; для $x \in [0,c]$ существует единственное положительное решение P_x^+, определенное до $T_{a,c}$. Положим

$$\mathsf{P}_x^0 = \begin{cases} \mathsf{P}_x^-, & \text{если } x \in [a,0], \\ \mathsf{P}_x^+, & \text{если } x \in (0,c]. \end{cases} \tag{3.9}$$

Для $x \in [a,0)$ определим $\widetilde{\mathsf{P}}_x^1$ как образ меры $\widetilde{\mathsf{P}}_x^- \times \widetilde{\mathsf{P}}_0^+$ при отображении

$$C(\mathbb{R}_+) \times C_0(\mathbb{R}_+) \ni (\omega_1, \omega_2) \longmapsto G(\omega_1, \omega_2, T_0(\omega_1)) \in C(\mathbb{R}_+),$$

где G — функция склеивания, $\widetilde{\mathsf{P}}_x^- = \mathsf{P}_x^- \circ \Phi_{T_{a,c}}^{-1}$, $\widetilde{\mathsf{P}}_x^+ = \mathsf{P}_x^+ \circ \Phi_{T_{a,c}}^{-1}$. Положим

$$\mathsf{P}_x^1 = \begin{cases} \widetilde{\mathsf{P}}_x^1 | \mathcal{F}_{T_{a,b}}, & \text{если } x \in [a,0), \\ \mathsf{P}_x^+, & \text{если } x \in [0,c]. \end{cases} \tag{3.10}$$

Используя лемму B.9, можем проверить, что для любого $x \in [a,c]$ меры P_x^0 и P_x^1 являются решениями с $X_0 = x$, определенными до $T_{a,c}$. Далее, можно проверить, что оба семейства $(\widetilde{\mathsf{P}}_x^0)_{x\in[a,c]}$, $(\widetilde{\mathsf{P}}_x^1)_{x\in[a,c]}$, где $\widetilde{\mathsf{P}}_x^\lambda = \mathsf{P}_x^\lambda \circ \Phi_{T_{a,c}}^{-1}$, $\lambda = 1,2$, обладают строго марковским свойством. Мы не будем доказывать это утверждение, а проверим обратное.

Теорема 3.7б. *Пусть нуль имеет тип* $(2,3)$. *Для* $x \in [a,c]$ *обозначим через* $(\mathsf{P}_x, T_{a,c})$ *решение с* $X_0 = x$. *Положим* $\widetilde{\mathsf{P}}_x = \mathsf{P}_x \circ \Phi_{T_{a,c}}^{-1}$ *и предположим, что семейство* $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[a,c]}$ *обладает строго марковским свойством. Тогда либо* $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x^0$ *для любого* $x \in [a,c]$, *либо* $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x^1$ *для любого* $x \in [a,c]$, *где* P_x^0 *и* P_x^1 *заданы равенствами* (3.9) *и* (3.10), *соответственно.*

Доказательство. Предположим, что $\widetilde{\mathsf{P}}_0(T_{0+} < \infty) > 0$. По строго марковскому свойству,

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_0}[I(T_{0+} < \infty)\, I(\forall t > T_{0+},\, X_t > 0)] = \widetilde{\mathsf{P}}_0(T_{0+} < \infty)\, \widetilde{\mathsf{P}}_0(\forall t > 0,\, X_t > 0).$$

Согласно теореме 3.2г (ii), левая часть этого равенства может быть переписана в виде $\widetilde{\mathsf{P}}_0(T_{0+} < \infty)$. Итак, $\widetilde{\mathsf{P}}_0(\forall t > 0,\, X_t > 0) = 1$. Это означает, что $T_{0+} = 0$ $\widetilde{\mathsf{P}}_0$-п.н. Используя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3.2б (ii), заключаем, что $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x^1$ для любого $x \in [a,c]$.

Предположим теперь, что $\widetilde{\mathsf{P}}_0(T_{0+} < \infty) = 0$. Это значит, что решения P_x с $x \in [a,0]$ отрицательны. Следовательно, $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x^- = \mathsf{P}_x^0$ для $x \in [a,0]$. Если $x \in (0,c]$, то, по теореме 2.8е (ii), $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x^+ = \mathsf{P}_x^0$. Это означает, что $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x^0$ для любого $x \in [a,c]$. □

Рассмотрим наконец случай, когда нуль имеет тип **(2,2)**. Обозначим через ρ_+, s_+ функции, заданные равенствами (2.8), (2.9). Обозначим через ρ_-, s_- функции, заданные равенствами (3.2), (3.3). Для $\lambda \in (0,1)$ положим

$$s^\lambda(x) = \begin{cases} \lambda s_-(x), & \text{если } x \in [a,0], \\ (1-\lambda)s_+(x), & \text{если } x \in [0,c], \end{cases}$$

$$m^\lambda(dx) = \frac{I(a<x<0)}{\lambda\rho_-(x)\sigma^2(x)}dx + \frac{I(0<x<c)}{(1-\lambda)\rho_+(x)\sigma^2(x)}dx + \Delta_a(dx) + \Delta_c(dx),$$

где Δ_a и Δ_c обозначают бесконечные массы, сосредоточенные в точках a и c, соответственно. Возьмем $x \in [a,c]$, $\lambda \in [0,1]$. Пусть B —

броуновское движение, выходящее из точки $s^\lambda(x)$, и

$$\begin{aligned}
A_t &= \int_{s^\lambda([a,c])} L_t^y(B) m^\lambda \circ (s^\lambda)^{-1}(dy),\\
\tau_t &= \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},\\
\widetilde{\mathsf{P}}_x^\lambda &= \operatorname{Law}\bigl((s^\lambda)^{-1}(B_{\tau_t});\, t \geqslant 0\bigr),\\
\mathsf{P}_x^\lambda &= \widetilde{\mathsf{P}}_x^\lambda | \mathcal{F}_{T_{a,c}}.
\end{aligned}$$

Определим P_x^1 так же, как в (3.10); P_x^0 определяется аналогично.

Меру P_x^λ можно неформально описать следующим образом. Выпускаем решение из точки x и каждый раз, когда оно попадает в нуль, продолжаем его в положительном направлении с вероятностью λ и в отрицательном направлении с вероятностью $1-\lambda$. Этому можно придать строгий смысл при помощи теории экскурсий.

Те же рассуждения, что были использованы при доказательстве теоремы 2.8б, позволяют проверить, что для любых $\lambda \in [0,1]$ и $x \in [a,c]$ мера $(\mathsf{P}_x^\lambda, T_{a,c})$ является решением с $X_0 = x$. Далее, можно проверить, что для любого $\lambda \in [0,1]$ семейство $(\widetilde{\mathsf{P}}_x^\lambda)_{x\in[a,c]}$, где $\widetilde{\mathsf{P}}_x^\lambda = \mathsf{P}_x^\lambda \circ \Phi_{T_{a,c}}^{-1}$, обладает строго марковским свойством. Однако мы не будем доказывать эти утверждения, а проверим обратное.

Теорема 3.7в. *Пусть нуль имеет тип* $(2,2)$. *Для* $x \in [a,c]$ *обозначим через* $(\mathsf{P}_x, T_{a,c})$ *решение с* $X_0 = x$. *Положим* $\widetilde{\mathsf{P}}_x = \mathsf{P}_x \circ \Phi_{T_{a,c}}^{-1}$ *и предположим, что семейство* $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[a,c]}$ *обладает строго марковским свойством. Тогда существует* $\lambda \in [0,1]$ *такое, что* $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x^\lambda$ *для любого* $x \in [a,c]$.

Доказательство. Предположим сначала, что $T_{0-} = \infty$ $\widetilde{\mathsf{P}}_0$-п.н. Тогда, согласно строго марковскому свойству, $X \geqslant 0$ на $[\![T_0, T_{a,c}]\!]$ P_x-п.н. для любого $x \in [a,c]$. Используя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3.2б (ii), заключаем, что $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x^1$ для любого $x \in [a,c]$.

Аналогично проверяем, что если $T_{0+} = \infty$ $\widetilde{\mathsf{P}}_0$-п.н., то $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_x^0$ для любого $x \in [a,c]$.

Теперь предположим, что $\widetilde{\mathsf{P}}_0(T_{0-} < \infty) > 0$, $\widetilde{\mathsf{P}}_0(T_{0+} < \infty) > 0$. Докажем, что семейство $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[a,c]}$ является в этом случае регулярным (см. определение A.26). Условие (a) определения A.26, очевидно, выполнено, так что нужно проверить лишь (b). Проверим это свойство для $x \in (0,c)$, $y = a$. Обозначим через P_x^+ положительное решение с $X_0 = x$, определенное до $T_{a,c}$. Согласно теореме 2.8а, $\mathsf{P}_x|\mathcal{F}_{T_{\delta,c}} = \mathsf{P}_x^+|\mathcal{F}_{T_{\delta,c}}$ для любого $\delta \in (0,c)$. Следовательно, $\mathsf{P}_x|\mathcal{F}_{T_{0,c}} = \mathsf{P}_x^+|\mathcal{F}_{T_{0,c}}$. Из теоремы 2.8б следует, что $\mathsf{P}_x^+(T_0 < T_c) > 0$. Значит, $\widetilde{\mathsf{P}}_x(T_0 < \infty) > 0$. Поскольку $\widetilde{\mathsf{P}}_0(T_{0-} < \infty) > 0$, то существует $d \in [a,0)$ такое, что $\widetilde{\mathsf{P}}_0(T_d < \infty) > 0$. Далее, $\widetilde{\mathsf{P}}_d(T_a < \infty) > 0$. Используя строго марковское свойство в моменты T_0 и T_d, получаем $\widetilde{\mathsf{P}}_x(T_y < \infty) > 0$. Итак, семейство $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[a,c]}$ регулярно.

Обозначим через s и m функцию шкалы и меру скорости семейства $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[a,c]}$ (см. определения A.28, A.30). Можем сразу предположить, что $s(0) = 0$. Для $x \in [0,c]$ определим $\widetilde{\mathsf{Q}}_x$ как образ меры $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ при отображении $\omega \mapsto \omega^{T_{0,c}(\omega)}$. Тогда $(\widetilde{\mathsf{Q}}_x)_{x\in[0,c]}$ является регулярным строго марковским семейством, функция шкалы которого есть сужение s на $[0,c]$, а мера скорости которого есть сужение m на $(0,c)$. С другой стороны, $\widetilde{\mathsf{P}}_x|\mathcal{F}_{T_{0,c}}$ является решением до $T_{0,c}$, и поэтому $\widetilde{\mathsf{Q}}_x|\mathcal{F}_{T_{0,c}} = \mathsf{P}_x^+$. Поскольку $X^{T_{0,c}} = X$ $\widetilde{\mathsf{Q}}_x$-п.н., получаем $\widetilde{\mathsf{Q}}_x = \widetilde{\mathsf{P}}_x^+$. Мера $\widetilde{\mathsf{P}}_x^+$ получается из винеровской путем замены времени и преобразования фазового пространства (см. доказательство теоремы 2.8а). Явный вид замены времени и преобразования фазового пространства позволяет заключить (см. [56; Th. 20.9]), что $(\widetilde{\mathsf{P}}_x^+)_{x\in[0,c]}$ — регулярное строго марковское семейство с функцией шкалы $s_+(x)$ и мерой скорости

$$m_+(dx) = \frac{I(0 < x < c)}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx.$$

Функция шкалы определена с точностью до положительного аффинного преобразования (см. предложение A.27). Следовательно, существует

$\lambda_+ > 0$ такое, что

$$s(x) = \lambda_+ s_+(x), \quad x \in [0, c],$$
$$m|_{(0,c)}(dx) = \frac{I(0 < x < c)}{\lambda_+ \rho(x) \sigma^2(x)} dx.$$

Аналогично проверяем, что существует $\lambda_- > 0$ такое, что

$$s(x) = \lambda_- s_-(x), \quad x \in [a, 0],$$
$$m|_{(a,0)}(dx) = \frac{I(a < x < 0)}{\lambda_- \rho(x)\, \sigma^2(x)} dx.$$

Имеем

$$\int_0^{T_{a,c}} I(X_s = 0) ds = \int_0^{T_{a,c}} \frac{I(X_s = 0)}{\sigma^2(0)} d\langle X\rangle_s$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{I(x = 0)}{\sigma^2(0)} L^x_{T_{a,c}}(X) dx = 0 \quad \widetilde{\mathsf{P}}_0\text{-п.н.}$$

Следовательно, $m\{0\} = 0$. Приходим к равенствам

$$s(x) = \lambda\, s^\lambda(x),$$
$$m(dx) = \frac{1}{\lambda} m^\lambda(dx),$$

где $\lambda = \frac{\lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-}$. Итак, $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x \in [a,c]}$ — регулярное семейство, в качестве функции шкалы и меры скорости которого можно взять s^λ и m^λ. Из предложения A.31 следует, что $\mathsf{P}_x = \mathsf{P}^\lambda_x$ для любого $x \in [a, c]$. □

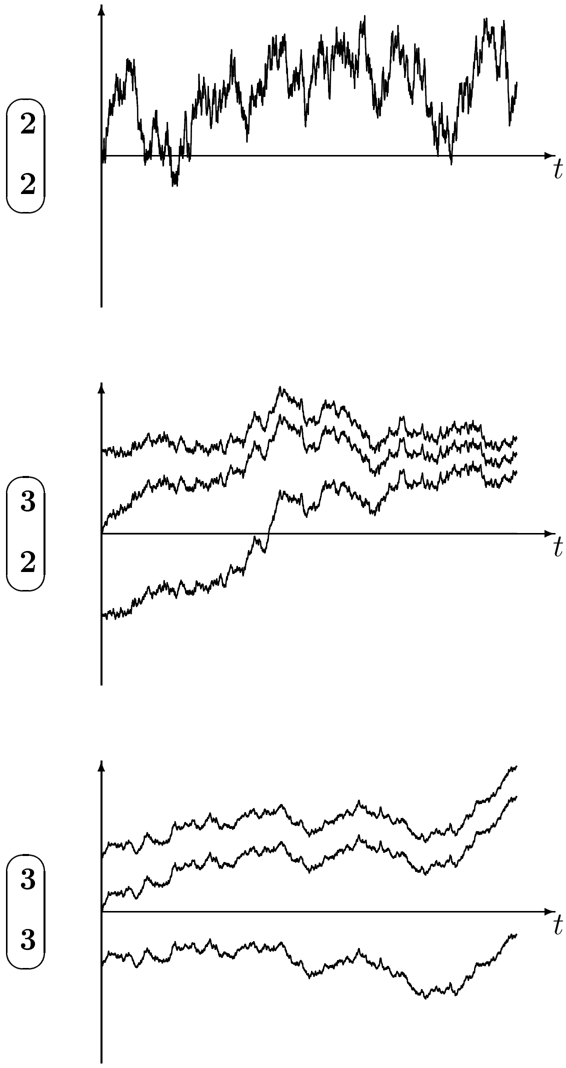


Рис. 3.3. Поведение строго марковских решений для различных типов точек ветвления. На рисунках изображены смоделированные траектории решений с различными начальными точками. Верхний рисунок отвечает случаю, когда нуль имеет тип (2,2). Он показывает траекторию решения P^{λ} с $\lambda = 0.7$. Средний и нижний рисунки отвечают случаям, когда нуль имеет типы (2,3) и (3,3), соответственно. На них изображены траектории решения P^{1}.

Глава 4

Классификация на бесконечности и частные случаи

На протяжении этой главы будем рассматривать СДУ (2) и предполагать, что b и σ измеримы, причем $\sigma(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Через X будем обозначать канонический процесс на $C(\mathbb{R}_+)$ или $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ (см. определение 1.9), а через $(\mathcal{F}_t)$ — каноническую фильтрацию. Решения, рассматриваемые в этой главе, являются локальными (т.е. решениями в смысле определений 1.10, 1.12).

§ 4.1 Классификация на бесконечности: результаты

На протяжении параграфа будем предполагать, что

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}([a,\infty))$$

для некоторого $a \in \mathbb{R}$.

Будем использовать функции

$$\rho(x) = \exp\left(-\int_a^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}dy\right), \quad x \in [a,\infty), \tag{4.1}$$

$$s(x) = -\int_x^\infty \rho(y)dy, \quad x \in [a,\infty) \tag{4.2}$$

и обозначения

$$\overline{T}_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n,$$
$$\overline{T}_{a,\infty} = \overline{T}_a \wedge \overline{T}_\infty.$$

Теорема 4.1а. *Предположим, что*

$$\int_a^\infty \rho(x)dx = \infty.$$

Если $x_0 \in [a, \infty)$ *, то существует единственное решение* P *до* T_a *. При этом* $T_a < \infty$ P *-п.н.*

Если выполнены условия теоремы 4.1а, то будем говорить, что $+\infty$ имеет *тип A*.

Теорема 4.1б. *Предположим, что*

$$\int_a^\infty \rho(x)dx < \infty, \quad \int_a^\infty \frac{|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx = \infty.$$

Если $x_0 \in [a, \infty)$ *, то существует единственное решение* P *до* T_a *. Если кроме того* $x_0 > a$ *, то* $\mathsf{P}(T_a = \infty) > 0$ *и* $\lim_{t\to\infty} X_t = +\infty$ P *-п.н. на* $\{T_a = \infty\}$ *.*

Если выполнены условия теоремы 4.1б, то будем говорить, что $+\infty$ имеет *тип B*.

Теорема 4.1в. *Предположим, что*

$$\int_a^\infty \rho(x)dx < \infty, \quad \int_a^\infty \frac{|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty.$$

Если $x_0 \in (a, \infty)$ *, то существует единственное решение* P *до* $\overline{T}_{a,\infty}-$ *. При этом* $\mathsf{P}(\overline{T}_\infty < \infty) > 0$ *. (Другими словами, решение взрывается в* $+\infty$ *со строго положительной вероятностью.)*

Если выполнены условия теоремы 4.1в, то будем говорить, что $+\infty$ имеет *тип C*.

Феллеровский критерий взрывов (см. [49], [57; Ch. 5, Th. 5.29] или [25; § 3.6]) получается как следствие приведенных выше результатов.

Следствие 4.2 (Феллеровский критерий взрывов). *Предположим, что* $x_0 \in (a, \infty)$ *и пусть* P *— решение до* $\overline{T}_{a,\infty}-$ *. Оно взрывается в* $+\infty$ *со строго положительной вероятностью* (*т.е.* $\mathsf{P}(\overline{T}_\infty < \infty) > 0$), *если и только если*

$$\int_a^\infty \rho(x)dx < \infty, \quad \int_a^\infty \frac{|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty.$$

Дадим теперь неформальное описание приведенных выше результатов.

Если $+\infty$ имеет тип **A**, то не происходит взрыва в $+\infty$. Кроме того, решение *возвратно* в следующем смысле. Если нет особых точек между начальной точкой x_0 и точкой $a < x_0$, то решение достигает уровня a п.н. Для СДУ

$$dX_t = dB_t, \quad X_0 = x_0$$

$+\infty$ имеет тип A.

Если $+\infty$ имеет тип **B**, то не происходит взрыва в $+\infty$, но решение стремится к $+\infty$ со строго положительной вероятностью. Иными словами, решение *невозвратно*. Примером СДУ, для которого $+\infty$ имеет тип B, служит уравнение

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x_0$$

с $\mu > 0$ (это вытекает из теоремы 4.6a).

Если $+\infty$ имеет тип **C**, то происходит взрыв в $+\infty$ (т.е. решение достигает $+\infty$ за конечное время) со строго положительной вероятностью. Соответствующий пример дается уравнением

$$dX_t = \varepsilon|X_t|^{1+\varepsilon}dt + dB_t, \quad X_0 = x_0$$

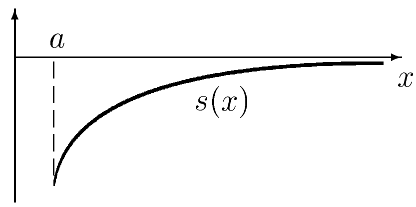
с $\varepsilon > 0$ (это вытекает из теоремы 4.6a).

$$\sigma \neq 0\,, \quad \frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}([a,\infty))$$

$$\int_a^\infty \rho = \infty \qquad \textbf{A}$$

$$\int_a^\infty \rho < \infty$$

$$\int_a^\infty \frac{|s|}{\rho\sigma^2} = \infty \qquad \textbf{B}$$



$$\int_a^\infty \frac{|s|}{\rho\sigma^2} < \infty \qquad \textbf{C}$$

Тип	Поведение
A	возвратное
B	невозвратное
C	взрыв

$$\rho(x) = \exp\left(-\int_a^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}dy\right)$$

$$s(x) = -\int_x^\infty \rho(y)dy$$

Рис. 4.1. Классификация на бесконечности

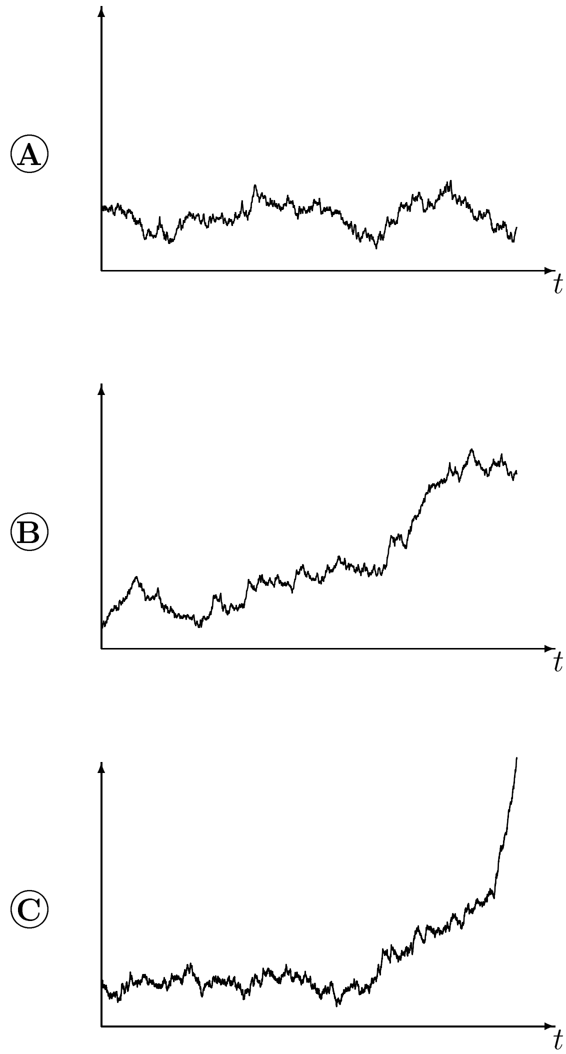


Рис. 4.2. Поведение решений для различных типов бесконечности. На рисунках показаны смоделированные траектории решений.

§ 4.2 Классификация на бесконечности: доказательства

`Доказательство теоремы 4.1a.` *Существование.* Рассмотрим функцию

$$r(x)=\int_a^x \rho(y)dy, \quad x\in[a,\infty).$$

Пусть B — $(\mathcal{G}_t)$-броуновское движение, выходящее из точки, $r(x_0)$, заданное на фильтрованном вероятностном пространстве $\big(\Omega,\mathcal{G},(\mathcal{G}_t),\mathsf{Q}\big)$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
&\varkappa(y)=\rho(r^{-1}(y))\sigma(r^{-1}(y)), \quad y\in[0,\infty),\\
&A_t=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t \varkappa^{-2}(B_s)ds, & \text{если } t<T_0(B),\\ \infty, & \text{если } t\geqslant T_0(B),\end{cases}\\
&\tau_t=\inf\{s\geqslant 0: A_s>t\},\\
&Y_t=B_{\tau_t}, \quad t\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.8a, проверяем, что $A_{T_0(B)-}=T_0(Y)<\infty$ Q-п.н. Положим $Z=s^{-1}(Y)$. Оценки, использованные в (2.20), показывают, что для любого $c>x_0$

$$\mathsf{E}_\mathsf{Q}\int_0^{T_{a,c}(Z)}\big(1+|b(Z_t)|+\sigma^2(Z_t)\big)dt<\infty. \tag{4.3}$$

Далее, $T_a(Z)=T_0(Y)<\infty$ Q-п.н. Устремляя $c\to+\infty$ в (4.3), получаем

$$\int_0^{T_a(Z)}\big(1+|b(Z_t)|+\sigma^2(Z_t)\big)dt<\infty \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.} \tag{4.4}$$

Доказательство существования теперь завершается так же, как в теореме 2.8a.

Единственность. Единственность вытекает из леммы B.6, примененной к моментам остановки $T_{a,n}$.

Свойство $T_a<\infty$ P-п.н. является следствием неравенства (4.4). □

`Доказательство теоремы 4.16.` *Существование.* Пусть B — $(\mathcal{G}_t)$-броуновское движение, выходящее из точки $s(x_0)$, заданное на фильтрованном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q}\big)$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
&\varkappa(y) = \rho(s^{-1}(y))\sigma(s^{-1}(y)), \quad y \in [\alpha, 0),\\
&A_t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \varkappa^{-2}(B_s)ds, & \text{если } t < T_{\alpha,0}(B),\\ \infty, & \text{если } t \geqslant T_{\alpha,0}(B), \end{cases}\\
&\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},\\
&Y_t = B_{\tau_t}, \quad t \geqslant 0,
\end{aligned}$$

где $\alpha = s(a)$. Используя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.8a, проверяем, что $A_{T_{\alpha,0}(B)-} = T_{\alpha,0}(Y)$ Q-п.н. Далее, для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\varepsilon}^0 \frac{|y|}{\varkappa^2(y)}dy = \int_{s^{-1}(-\varepsilon)}^\infty \frac{|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx = \infty.$$

По следствию A.24, момент $A_{T_{\alpha,0}(B)-}$ Q-п.н. бесконечен на множестве $\{T_0(B) < T_\alpha(B)\}$. Следовательно, $T_0(Y) = \infty$ Q-п.н. Таким образом, процесс $Z = s^{-1}(Y)$ корректно определен. Оценки, использованные в (2.20), показывают, что для любого $c > x_0$

$$\mathsf{E_Q}\int_0^{T_{a,c}(Z)} \big(1 + |b(Z_t)| + \sigma^2(Z_t)\big)dt < \infty.$$

Устремляя $c \to +\infty$, получаем, что для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^{t\wedge T_a(Z)} \big(1 + |b(Z_t)| + \sigma^2(Z_t)\big)dt < \infty \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.}$$

Доказательство существования теперь завершается так же, как в теореме 2.8a.

Единственность. Единственность решения вытекает из леммы B.6, примененной к моментам остановки $T_{a,n}$.

Свойства $\mathsf{P}(T_a = \infty) > 0$ и $\lim_{t\to\infty} X_t = +\infty$ P-п.н. на $\{T_a = \infty\}$ вытекают из того, что $\mathsf{Q}(T_0(B) < T_\alpha(B)) > 0$ и на множестве $\{T_0(B) < T_\alpha(B)\}$ выполнено $Y_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathsf{Q}\text{-п.н.}} 0$. □

`Доказательство теоремы 4.1в.` Доказательство проводится так же, как в теореме 2.8г. □

§ 4.3 Степенные уравнения

Сначала исследуем типы нуля для степенных уравнений.

Теорема 4.3а. *Предположим, что существует $a > 0$ такое, что*

$$b(x) = \mu x^{\alpha}, \quad \sigma(x) = \nu x^{\beta}, \quad x \in (0, a], \tag{4.5}$$

где $\mu, \nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\nu \neq 0$. Положим $\lambda = \mu/\nu^2$, $\gamma = \alpha - 2\beta$. Тогда правый тип нуля для СДУ (2) дается рис. 4.3.

`Доказательство.` При $\mu = 0$ уравнение исследуется тривиальным образом. Предположим, что $\mu \neq 0$. Функция ρ, заданная равенством (2.8), с точностью до умножения на положительную константу совпадает с функцией

$$\widetilde{\rho}(x) = \begin{cases} \exp\Bigl(-\dfrac{2\lambda}{\gamma+1} x^{\gamma+1}\Bigr), & \text{если } \gamma \neq -1, \\ x^{-2\lambda}, & \text{если } \gamma = -1. \end{cases}$$

Поэтому функция s, заданная равенством (2.9), с точностью до умножения на положительную константу совпадает с функцией

$$\widetilde{s}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \exp\Bigl(-\frac{2\lambda}{\gamma+1} y^{\gamma+1}\Bigr) dy, & \text{если } \gamma < -1,\ \lambda < 0, \\ \displaystyle\int_x^a \exp\Bigl(-\frac{2\lambda}{\gamma+1} y^{\gamma+1}\Bigr) dy, & \text{если } \gamma < -1,\ \lambda > 0, \\ x^{-2\lambda+1}, & \text{если } \gamma = -1,\ \lambda < 1/2, \\ \ln x - \ln a, & \text{если } \gamma = -1,\ \lambda = 1/2, \\ -x^{-2\lambda+1} + a^{-2\lambda+1}, & \text{если } \gamma = -1,\ \lambda > 1/2, \\ \displaystyle\int_0^x \exp\Bigl(-\frac{2\lambda}{\gamma+1} y^{\gamma+1}\Bigr) dy, & \text{если } \gamma > -1. \end{cases}$$

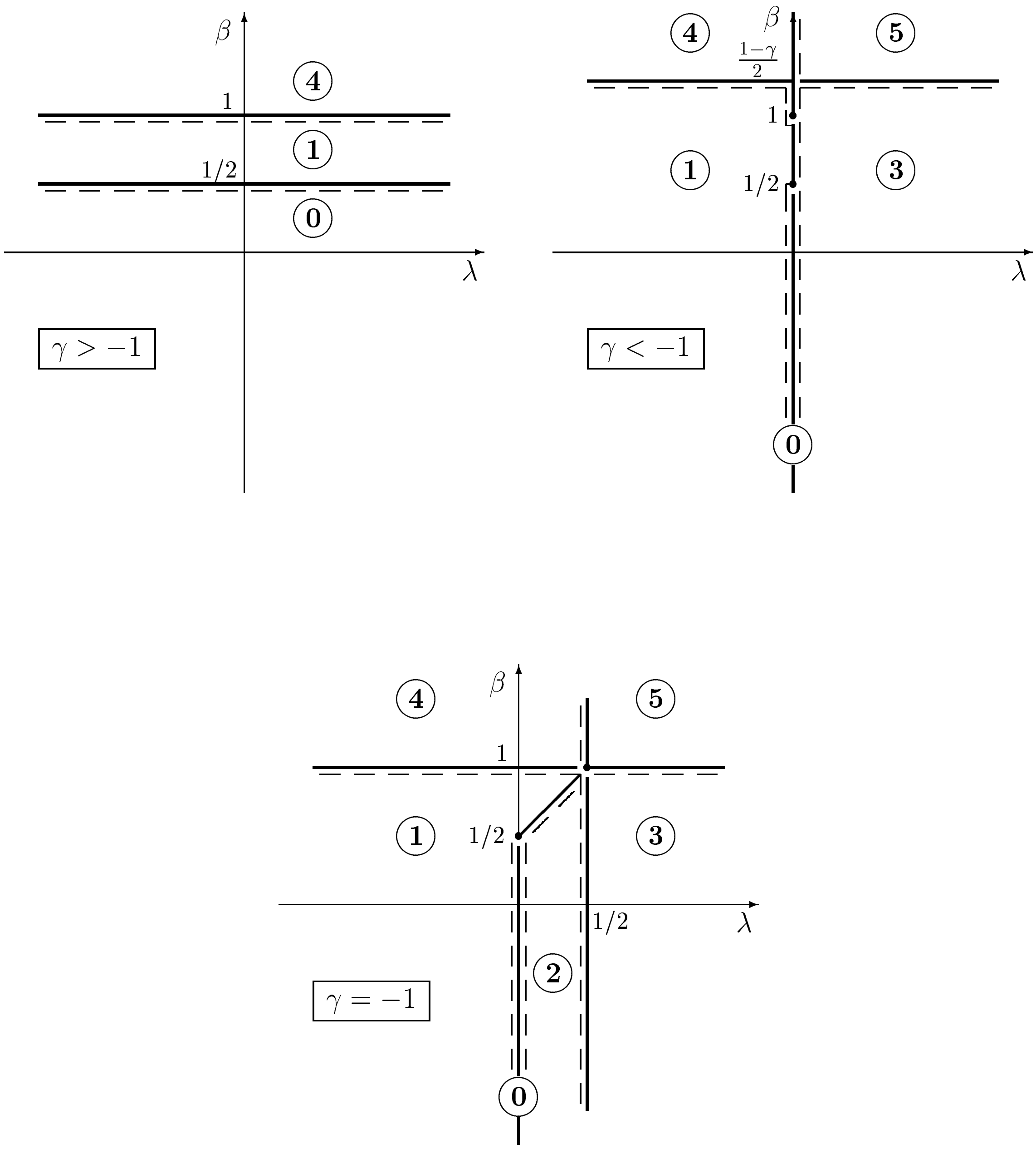


Рис. 4.3. Классификация в нуле для степенных уравнений. Здесь $\lambda = \mu/\nu^2$, $\gamma = \alpha - 2\beta$, где α, β, μ, ν задаются формулой (4.5). Сначала следует вычислить γ и выбрать соответствующий рисунок (из трех возможных). Потом следует отметить на этом рисунке точку с координатами (λ, β) и выяснить, какой области она принадлежит. Число (i), отмеченное в этой области, показывает, что нуль имеет правый тип i. Например, если $\gamma < -1$, $\lambda > 0$ и $\beta \geqslant (1-\gamma)/2$, то нуль имеет правый тип 5.

Условия интегрируемости в формулировках теорем 2.8а–2.8ж не изменятся при переходе от функций ρ, s к функциям $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{s}$.

Предположим, что $\gamma > -1$. В этом случае $\widetilde{\rho}(x) \xrightarrow[x\downarrow 0]{} 1$ и $\widetilde{s}(x)/x \xrightarrow[x\downarrow 0]{} 1$. Легко проверить, что при $\beta < 1/2$ нуль имеет правый тип 0; при $1/2 \leqslant \beta < 1$ нуль имеет правый тип 1; при $\beta \geqslant 1$ нуль имеет правый тип 4.

Аналогичным образом исследуются случаи $\gamma = -1$ и $\gamma < -1$. Единственный нетривиальный момент — нахождение асимптотики при $x \downarrow 0$ функции $|\widetilde{s}(x)|/\widetilde{\rho}(x)$ в случае, когда $\gamma < -1$, $\mu \neq 0$. Это делается при помощи приводимой ниже леммы. □

Лемма 4.4. *Пусть $\gamma < -1$ и $\mu \neq 0$. Тогда существуют константы $0 < c_1 < c_2$ и $\delta > 0$ такие, что*

$$c_1 x^{-\gamma} \leqslant \frac{|s(x)|}{\rho(x)} \leqslant c_2 x^{-\gamma}, \quad x \in (0, \delta).$$

Доказательство. Дадим доказательство лишь для случая $\mu < 0$ (случай $\mu > 0$ рассматривается аналогично). Если $\mu < 0$, то $\int_0^a \rho(x)dx < \infty$ и $s(x) \geqslant 0$ на $(0, a]$.

Из (2.8) следует, что $\rho'(x) = -2\lambda x^{\gamma}\rho(x)$ для $x \in (0, a)$, и поэтому

$$\rho(x) = -2\lambda \int_0^x y^{\gamma}\rho(y)dy = 2|\lambda| \int_0^x y^{\gamma}\rho(y)dy, \quad x \in (0, a). \tag{4.6}$$

Существует $\delta' \in (0, a)$ такое, что

$$\frac{2\lambda}{\gamma+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{\gamma+1} > \frac{2\lambda}{\gamma+1}x^{\gamma+1} + \ln 2^{\gamma}, \quad x \in (0, \delta').$$

Тогда $\rho(x/2) < 2^{\gamma}\rho(x)$ для $x \in (0, \delta')$, и поэтому

$$\int_0^{x/2} y^{\gamma}\rho(y)dy = 2^{-\gamma-1}\int_0^x y^{\gamma}\rho(y/2)dy < \frac{1}{2}\int_0^x y^{\gamma}\rho(y)dy, \quad x \in (0, \delta').$$

Следовательно,

$$\int_{x/2}^x y^{\gamma}\rho(y)dy > \frac{1}{2}\int_0^x y^{\gamma}\rho(y)dy$$

и, используя (4.6), получаем

$$2|\lambda| \int_{x/2}^x y^{\gamma}\rho(y)dy < \rho(x) < 4|\lambda| \int_{x/2}^x y^{\gamma}\rho(y)dy, \quad x \in (0, \delta').$$

Итак, существуют константы $0 < c_1' < c_2'$ такие, что

$$c_1' x^\gamma \int_{x/2}^x \rho(y)dy < \rho(x) < c_2' x^\gamma \int_{x/2}^x \rho(y)dy, \quad x \in (0, \delta'). \tag{4.7}$$

Аналогично проверяем существование констант $0 < c_1'' < c_2''$ и $\delta'' > 0$ таких, что

$$c_1'' \int_{x/2}^x \rho(y)dy < s(x) < c_2'' \int_{x/2}^x \rho(y)dy, \quad x \in (0, \delta''). \tag{4.8}$$

Объединяя (4.7) и (4.8), получаем требуемое утверждение. □

Теорема 4.3б. *Предположим, что*

$$\frac{b(x)}{\mu x^\alpha} \xrightarrow[x \downarrow 0]{} 1, \quad \frac{\sigma(x)}{\nu x^\beta} \xrightarrow[x \downarrow 0]{} 1,$$

где μ, ν, α, β *таковы, что* $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ *и* $\alpha - 2\beta \neq -1$. *Положим* $\lambda = \mu/\nu^2$, $\gamma = \alpha - 2\beta$. *Тогда правый тип нуля для СДУ* (2) *дается рис.* 4.3.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.3а.

Приводимый ниже пример показывает, что условие $\alpha - 2\beta \neq -1$ в предыдущей теореме существенно.

Пример 4.5. *Если*

$$b(x) = \frac{1}{2x}, \quad \sigma(x) = 1, \quad x \in (0, a]$$

для некоторого $a > 0$, *то нуль имеет правый тип 3.*

Если же

$$b(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x \ln x}, \quad \sigma(x) = 1, \quad x \in (0, a]$$

для некоторого $a \in (0, 1)$, *то нуль имеет правый тип 2.*

Доказательство. Первой утверждение вытекает из теоремы 4.3а.

Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$\int_x^a \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy = -\ln x - 2\ln|\ln x| + \mathrm{const}, \quad x \in (0, a].$$

Итак, функция ρ совпадает на $(0,a]$ с функцией $\widetilde{\rho}(x) = 1/(x\ln^2 x)$ с точностью до умножения на положительную константу. Следовательно, функция $s(x)$ совпадает на $(0,a]$ с функцией $\widetilde{s}(x) = -1/\ln x$ с точностью до умножения на положительную константу. Доказательство завершается очевидным образом. □

Исследуем теперь типы бесконечности для степенных уравнений.

Теорема 4.6а. *Предположим, что существует $a > 0$ такое, что*

$$b(x) = \mu x^{\alpha}, \quad \sigma(x) = \nu x^{\beta}, \quad x \in [a,\infty), \tag{4.9}$$

где $\mu, \nu, \alpha\,\beta \in \mathbb{R}$ и $\nu \neq 0$. Положим $\lambda = \mu/\nu^2$, $\gamma = \alpha - 2\beta$. Тогда тип $+\infty$ для СДУ (2) *дается рис.* 4.3.

Доказательство. При $\mu = 0$ уравнение исследуется очевидным образом. Предположим, что $\mu \neq 0$. Функция ρ, заданная равенством (4.1), совпадает с следующей функцией с точностью до умножения на положительную константу

$$\widetilde{\rho}(x) = \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{2\lambda}{\gamma+1}x^{\gamma+1}\Big), & \text{если } \gamma \neq -1, \\ x^{-2\lambda}, & \text{если } \gamma = -1. \end{cases}$$

Следовательно, функция s, заданная равенством (4.2), совпадает с следующей функцией с точностью до умножения на положительную константу

$$\widetilde{s}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{\infty} \exp\Big(-\frac{2\lambda}{\gamma+1}y^{\gamma+1}\Big)dy, & \text{если } \gamma \neq -1, \\ x^{-2\lambda+1}, & \text{если } \gamma = -1,\ \lambda > 1/2, \\ \infty, & \text{если } \gamma = -1,\ \lambda \leqslant 1/2. \end{cases}$$

Условия интегрируемости в формулировках теорем 4.1а–4.1в не изменятся при переходе от функций ρ, s к функциям $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{s}$.

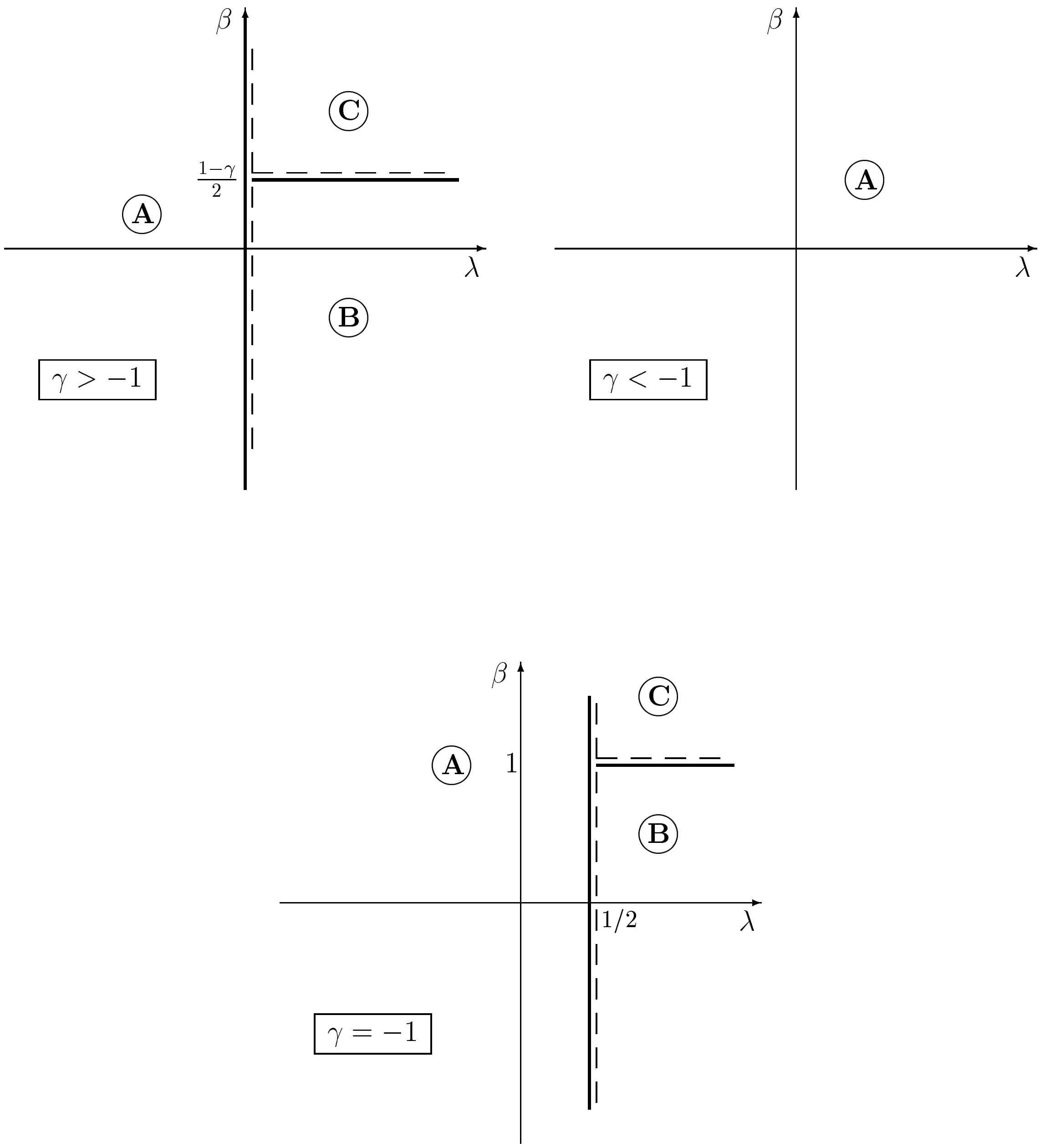


Рис. 4.4. Классификация на бесконечности для степенных уравнений. Здесь $\lambda = \mu/\nu^2$, $\gamma = \alpha - 2\beta$, где α, β, μ, ν задаются формулой (4.5). Сначала следует вычислить γ и выбрать соответствующий рисунок (из трех возможных). Потом следует отметить на этом рисунке точку с координатами (λ, β) и выяснить, какой области она принадлежит. Буква Λ, отмеченная в этой области, показывает, что $+\infty$ имеет тип Λ. Например, если $\gamma > -1$, $\lambda > 0$ и $\beta > (1-\gamma)/2$, то $+\infty$ имеет тип D.

Предположим, что $\gamma < -1$. В этом случае $\widetilde{\rho}(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$. Легко проверить, что $+\infty$ имеет тип A.

Аналогично исследуются случаи $\gamma = -1$ и $\gamma > -1$. Единственный нетривиальный момент — нахождение асимптотики при $x \to \infty$ функции $|\widetilde{s}(x)|/\widetilde{\rho}(x)$ в случае, если $\gamma > -1$, $\mu > 0$. Это делается при помощи приводимой ниже леммы. □

Лемма 4.7. *Пусть $\gamma > -1$ и $\mu > 0$. Тогда существуют $0 < c_1 < c_2$ и $\delta > 1$ такие, что*

$$c_1 x^{-\gamma} \leqslant \frac{|s(x)|}{\rho(x)} \leqslant c_2 x^{-\gamma}, \quad x \in (\delta, \infty).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.4.

Теорема 4.6б. *Предположим, что*

$$\frac{b(x)}{\mu x^{\alpha}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1, \quad \frac{\sigma(x)}{\nu x^{\beta}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1,$$

где μ, ν, α, β таковы, что $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ и $\alpha - 2\beta \neq -1$. Положим $\lambda = \mu/\nu^2$, $\gamma = \alpha - 2\beta$. Тогда тип $+\infty$ для СДУ (2) дается рис. 4.3.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.6а.

Приводимый ниже пример показывает, что условие $\alpha - 2\beta \neq -1$ в предыдущей теореме существенно.

Пример 4.8. *Если*

$$b(x) = \frac{x}{2}, \quad \sigma(x) = x, \quad x \in (a, \infty)$$

для некоторого $a > 0$, то $+\infty$ имеет тип A.

Если же

$$b(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2\ln x}, \quad \sigma(x) = x, \quad x \in (a, \infty)$$

для некоторого $a > 1$, то $+\infty$ имеет тип B.

Доказательство аналогично доказательству примера 4.5.

§ 4.4 Снос постоянного знака

Исследуем сначала возможные типы изолированных особых точек в случае сноса постоянного знака. Будем считать выполненным условие (2.7).

Теорема 4.9. **(i)** *Пусть* $\sigma^2 = 1$ *и* $b \geqslant 0$ *на* $(0, a]$. *Тогда нуль может иметь лишь один из типов* 0, 2, 3.

(ii) *Пусть* $\sigma^2 = 1$ *и* $b \leqslant 0$ *на* $(0, a]$. *Тогда нуль может иметь лишь один из типов* 0, 1.

(iii) *Пусть* $b \geqslant 0$ *на* $(0, a]$. *Тогда нуль может иметь лишь один из типов* 0, 1, 2, 3, 4, 5.

(iv) *Пусть* $b \leqslant 0$ *на* $(0, a]$. *Тогда нуль может иметь лишь один из типов* 0, 1, 4.

Доказательство. **(i)** Условие $b \geqslant 0$ означает, что ρ убывает на $(0, a]$. Предположим, что

$$\int_0^a \rho(x)dx < \infty. \tag{4.10}$$

Поскольку функция $1/\rho$ ограничена на $(0, a]$, имеем

$$\int_0^a \frac{1}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx = \int_0^a \frac{1}{\rho(x)}dx < \infty.$$

Далее,

$$\int_0^a \frac{2|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx = -\int_0^a \frac{\rho'(x)}{\rho^2(x)}dx = \int_{\rho(a)}^{\rho(0)} \frac{1}{y^2}dy < \infty.$$

Итак, если условие (4.10) выполнено, то нуль может иметь только тип 0 или 2.

Предположим, что условие (4.10)не выполнено. Тогда

$$|s(x)| = \int_x^a \rho(y)dy \leqslant a\rho(x), \quad x \in (0, a]. \tag{4.11}$$

Следовательно,

$$\int_0^a \frac{|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx = \int_0^a \frac{|s(x)|}{\rho(x)}dx < \infty.$$

Объединяя (4.11) с (2.13), получаем

$$\int_0^a \frac{b(x)|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty.$$

Итак, в этом случае нуль имеет правый тип 3.

(ii) Условие $b \leqslant 0$ означает, что ρ возрастает на $(0, a]$. Значит, выполнено условие (4.10).

Предположим, что $\rho(0+) > 0$. Тогда, согласно (2.8),

$$\int_0^a \frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)}dx < \infty.$$

Итак, в этом случае нуль имеет правый тип 0.

Предположим теперь, что $\rho(0+) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{2|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx &= -\int_0^a \frac{2b(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx \\ &= \int_0^a \frac{\rho'(x)}{\rho^2(x)}dx = \int_0^{\rho(a)} \frac{1}{y^2}dy = \infty.\end{aligned}$$

Далее,

$$s(x) = \int_0^x \rho(y)dy \leqslant x\rho(x), \quad x \in (0, a], \tag{4.12}$$

и следовательно,

$$\int_0^a \frac{s(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx = \int_0^a \frac{s(x)}{\rho(x)}dx < \infty.$$

Кроме того, согласно (4.12) и (2.13),

$$\int_0^a \frac{|b(x)|s(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty. \tag{4.13}$$

Итак, в этом случае нуль имеет правый тип 1.

(iii) Предположим, что нуль имеет правый тип 6. Тогда выполнено условие (4.10). Ввиду (4.12), $s(x)/\rho(x) \xrightarrow[x\downarrow 0]{} 0$. Используя (2.13), получаем

$$\int_0^a \frac{b(x)|s(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty.$$

Это означает, что нуль не может иметь правый тип 6.

(iv) Условие $b \leqslant 0$ влечет выполнение (4.10). Следовательно, правый тип нуля — один из 0, 1, 2, 4, 6. Имеют место неравенства (4.12), (4.13), так что нуль не может иметь правый тип 6.

Понятно также, что неравенства

$$\int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}dx < \infty$$

и

$$\int_0^a \frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)}dx = \infty$$

не могут выполняться одновременно (заметим, что функция ρ ограничена на $[0, a]$). Следовательно, нуль не может иметь правый тип 2. □

Замечание. Теорему 4.9 нельзя усилить. Действительно, рис. 4.3 показывает, что все возможности, которые разрешены этой теоремой, реализуются.

	$\sigma^2 = 1$	σ произвольно
$b \geqslant 0$	0 2 3	0 1 2 3 4 5
$b \leqslant 0$	0 1	0 1 4

Табл. 4.1. Возможные правые типы нуля в случае сноса постоянного знака

Из теоремы 4.9 следует, что изолированная особая точка может иметь правый тип 6 только если коэффициент сноса имеет переменный знак. Пример ниже показывает, что этот тип возможен.

Пример 4.10. *Пусть ρ — абсолютно непрерывная функция на $(0, a]$ такая, что*

$$1 \leqslant \rho(x) \leqslant 2, \quad x \in (0, a],$$
$$\int_0^a x|\rho'(x)|dx = \infty.$$

Положим

$$\sigma(x) = 1, \quad b(x) = -\frac{\rho'(x)}{2\rho(x)}.$$

Тогда нуль имеет правый тип 6.

Утверждение проверяется непосредственно.

Замечание. Предположим, что нуль имеет правый тип 6 и $x_0 > 0$. Пусть P — решение (2) до $\overline{T}_{0,a}-$. Очевидно, на σ-алгебре $\mathcal{F}$ существует единственная мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ такая, что $\widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_{\overline{T}_{0,a}-} = \mathsf{P}$ и процесс X останавливается $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н. при достижении точки 0 или a. Однако мера $\widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_{T_{0,a}}$ не является решением до $T_{0,a}$. Причина заключается в том, что

$$\mathsf{P}\left(\int_0^{T_{0,a}} |b(X_s)|ds = \infty\right) > 0$$

(см. доказательство теоремы 2.8г (i)). В частности, интеграл

$$\int_0^{T_{0,a}} b(X_s)ds \tag{4.14}$$

не может быть определен как интеграл Лебега–Стилтьеса. Но с другой стороны, существует предел $\lim_{t\uparrow T_{0,a}} X_t$ $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н. Было бы интересно изучить существование предела

$$\lim_{t\uparrow T_{0,a}} \int_0^t b(X_s)ds. \tag{4.15}$$

Например, если $\sigma = 1$, то, в силу равенства

$$X_t = x_0 + \int_0^{t\wedge T_{0,a}} b(X_s)ds + M_t, \quad t \geqslant 0,$$

этот предел существует $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н. (Заметим, что X_t $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н. стремится к пределу при $t \uparrow T_{0,a}$, а также M_t $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н. стремится к пределу при $t \uparrow T_{0,a}$.) Если предел (4.15) существует $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н. (или по $\widetilde{\mathsf{P}}$-вероятности), то его можно взять в качестве главного значения интеграла (4.14). В этом случае мы могли бы модифицировать определение 1.10 и сказать, что $\widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_{T_{0,a}}$ является решением (в обобщенном смысле), определенным до $T_{0,a}$.

Если принять такое обобщенное определение, то типы 6 и 1 сливаются вместе.

Исследование существования предела (4.15) может быть связано с исследованием главных значений интегральных функционалов диффузионных процессов (см. [69], [80] по поводу результатов, связанных с главными значениями броуновских интегральных функционалов).

Рассмотрим теперь возможные типы бесконечности в случае сноса постоянного знака. Из результатов параграфа 4.3 видно, что при условиях $b \geqslant 0$ и $\sigma^2 = 1$, $+\infty$ может иметь любой из типов A, B, C. Если же $b \leqslant 0$, то, как легко проверить, $+\infty$ имеет тип A.

	$\sigma^2 = 1$	σ произвольно
$b \geqslant 0$	A B C	A B C
$b \leqslant 0$	A	A

Табл. 4.2. Возможные типы $+\infty$ в случае сноса постоянного знака

Глава 5

Глобальные решения и инвариантные распределения

На протяжении этой главы будем рассматривать СДУ (2) и предполагать, что b и σ измеримы, причем $\sigma(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Через X будем обозначать канонический процесс на $C(\mathbb{R}_+)$, а через $(\mathcal{F}_t)$ — каноническую фильтрацию. Все решения, рассматриваемые в этой главе, являются глобальными, т.е. решениями в смысле определения 1.7.

§ 5.1 Глобальные решения: результаты

Теорема 5.1а. *Предположим, что уравнение* (2) *не имеет особых точек, т.е.*

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$

(i) *Если* $-\infty$ *и* $+\infty$ *имеют типы A или B, то существует единственное решение* P. *При этом для любого* $a \in \mathbb{R}$ *имеем* $\mathsf{P}(T_a < \infty) > 0$.

(ii) *Если* $-\infty$ *или* $+\infty$ *имеет тип C, то не существует решения.*

Теорема 5.1б. *Предположим, что нуль — единственная особая точка для уравнения* (2). *Пусть* $x_0 > 0$.

Тип $-\infty$	**Тип** $+\infty$	**Сущ.**	**Един.**	**Комментарии**
A B	A B	$+$	$+$	решение может достичь любую точку
C		$-$	$+$	взрыв в $-\infty$
	C	$-$	$+$	взрыв в $+\infty$

Табл. 5.1. Существование и единственность решения в случае отсутствия особых точек. К примеру, вторая строка отвечает ситуации, когда $-\infty$ имеет тип C и нет ограничений на тип $+\infty$. Таблица показывает, что в этом случае не существует решения, поскольку происходит взрыв в $-\infty$.

(i) *Если $+\infty$ имеет тип C, то не существует решения.*

(ii) *Если нуль имеет тип (i,j) с $i = 0,1,4,5,6$, $j = 0,1$ (случай $i = j = 0$ исключается), то не существует решения.*

(iii) *Если нуль имеет тип (i,j) с $i = 2,3$, $j = 0,1$, $-\infty$ имеет тип A или B и $+\infty$ имеет тип A или B, то существует единственное решение P. При этом $\mathsf{P}(T_0 < \infty) > 0$ и $X \leqslant 0$ на $[\![T_0, \infty[\![$ P-п.н.*

(iv) *Если нуль имеет тип (i,j) с $i = 2,3$, $j = 0,1$, а $-\infty$ имеет тип C, то не существует решения.*

(v) *Если нуль имеет тип (i,j) с $i = 0,1,4,5,6$, $j = 2$, а $+\infty$ имеет тип A или B, то существует единственное решение P. Оно положительно и $\mathsf{P}(T_0 < \infty) > 0$.*

(vi) *Если нуль имеет тип (i,j) с $i = 2,3$, $j = 2$, $-\infty$ имеет тип A или B и $+\infty$ имеет тип A или B, то существуют различные решения.*

(vii) *Если нуль имеет тип (i,j) с $i = 2,3$, $j = 2$, $-\infty$ имеет тип C, а $+\infty$ имеет тип A или B, то существует единственное решение P. Оно положительно и $\mathsf{P}(T_0 < \infty) > 0$.*

(viii) *Если нуль имеет тип (i,j) с $j = 3,4,5$, а $+\infty$ имеет тип A или B, то существует единственное решение. Оно строго положительно.*

(ix) *Если нуль имеет тип* (i, j) *с* $j = 6$, *то не существует решения.*

Теорема 5.1в. *Предположим, что нуль — единственная особая точка для уравнения* (2). *Пусть* $x_0 = 0$.

(i) *Если нуль имеет тип* (i, j) *с* $i = 0, 1, 4, 5, 6$, $j = 0, 1, 4, 5, 6$ (*случай* $i = j = 0$ *исключается*), *то не существует решения.*

(ii) *Если нуль имеет тип* (i, j) *с* $i = 0, 1, 4, 5, 6$, $j = 2, 3$, *а* $+\infty$ *имеет тип A или B, то существует единственное решение. Оно положительно.*

(iii) *Если нуль имеет тип* (i, j) *с* $i = 0, 1, 4, 5, 6$, $j = 2, 3$, *а* $+\infty$ *имеет тип C, то не существует решения.*

(iv) *Если нуль имеет тип* (i, j) *с* $i = 2, 3$, $j = 0, 1, 4, 5, 6$, *а* $-\infty$ *имеет тип A или B, то существует единственное решение. Оно отрицательно.*

(v) *Если нуль имеет тип* (i, j) *с* $i = 2, 3$, $j = 0, 1, 4, 5, 6$, *а* $-\infty$ *имеет тип C, то не существует решения.*

(vi) *Если нуль имеет тип* (i, j) *с* $i = 2, 3$, $j = 2, 3$, $-\infty$ *имеет тип A или B и* $+\infty$ *имеет тип A или B, то существуют различные решения.*

(vii) *Если нуль имеет тип* (i, j) *с* $i = 2, 3$, $j = 2, 3$, $-\infty$ *имеет тип A или B, а* $+\infty$ *имеет тип C, то существует единственное решение. Оно отрицательно.*

(viii) *Если нуль имеет тип* (i, j) *с* $i = 2, 3$, $j = 2, 3$, $-\infty$ *имеет тип C, а* $+\infty$ *имеет тип A или B, то существует единственное решение. Оно положительно.*

(ix) *Если нуль имеет тип* (i, j) *с* $i = 2, 3$, $j = 2, 3$, $-\infty$ *имеет тип C и* $+\infty$ *имеет тип C, то не существует решения.*

Замечание. Теоремы 5.1б, 5.1в показывают интересный эффект. Именно, может случиться, что наличие точки ветвления *не* нарушает единственности глобального решения (как видно из результатов параграфа 3.1, точка ветвления всегда нарушает единственность локального решения). Объяснение этого эффекта состоит в следующем. Предположим, к примеру, что нуль — точка ветвления, $-\infty$ имеет тип C, $+\infty$ имеет тип A или B и $x_0 \geqslant 0$. Если бы решение принимало отрицательные значения, то происходил бы взрыв в $-\infty$ с положительной вероятностью, что противоречит определению глобального решения. Значит, любое решение положительно. Но положительное решение единственно.

§ 5.2 Глобальные решения: доказательства

`Доказательство теоремы 5.1а.` **(i)** Доказательство проводится так же, как в теоремах 4.1а, 4.1б.

(ii) Без ограничения общности, можем предположить, что $+\infty$ имеет тип C. Предположим, что существует решение P. Фиксируем $a < x_0$. Пусть Q — решение до $\overline{T}_{a,\infty}-$ (оно дается теоремой 4.1в). Тогда $\mathsf{Q}(\overline{T}_\infty < \infty) > 0$. Следовательно, существуют $t > 0$ и $c > a$ такие, что $\mathsf{Q}(\overline{T}_\infty < t \wedge T_c) = \theta > 0$. Тогда для любого $n > c$ имеем $\mathsf{Q}(T_n < t \wedge T_c) \geqslant \theta$. Множество $\{T_n < t \wedge T_c\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}_{T_{c,n}}$, а $\mathsf{Q}|\mathcal{F}_{T_{c,n}}$ является решением до $T_{c,n}$. Из единственности решения следует, что для любого $n > c$ $\mathsf{P}(T_n < t \wedge T_c) \geqslant \theta$. Но это является противоречием. □

`Доказательство теоремы 5.1б.` **(i)** Доказательство проводится так же, как в теореме 5.1а (ii).

(ii) Предположим, что существует решение P. Фиксируем $a > x_0$. Тогда $\mathsf{P}|\mathcal{F}_{T_{0,a}}$ является решением до $T_{0,a}$. Из результатов параграфа 2.3 следует, что $\mathsf{P}(T_{0,a} < \infty$ и $X_{T_{0,a}} = 0) > 0$. Поэтому $\mathsf{P}(T_0 < \infty) > 0$. Но это противоречит теореме 3.2а.

Левый тип нуля	**Правый тип нуля**	**Тип $-\infty$**	**Тип $+\infty$**	**Сущ.**	**Един.**	**Комментарии**
			C	$-$	$+$	взрыв в $+\infty$
0 1 4 5 6	0 1			$-$	$+$	ловушка в нуле
2 3	0 1	A B	A B	$+$	$+$	проход через нуль
2 3	0 1	C		$-$	$+$	взрыв в $-\infty$
0 1 4 5 6	2		A B	$+$	$+$	отражение в нуле
2 3	2	A B	A B	$+$	$-$	ветвление в нуле
2 3	2	C	A B	$+$	$+$	отражение в нуле
	3 4 5		A B	$+$	$+$	решение строго положительно
	6			$-$	$+$	ловушка в нуле

Табл. 5.2. Существование и единственность решения в случае, если нуль — единственная особая точка. Начальная точка строго положительна.

Левый тип нуля	**Правый тип нуля**	**Тип $-\infty$**	**Тип $+\infty$**	**Сущ.**	**Един.**	**Комментарии**
0 1 4 5 6	0 1 4 5 6			$-$	$+$	ловушка в нуле
0 1 4 5 6	2 3		A B	$+$	$+$	решение положительно
0 1 4 5 6	2 3		C	$-$	$+$	взрыв в $+\infty$
2 3	0 1 4 5 6	A B		$+$	$+$	решение отрицательно
2 3	0 1 4 5 6	C		$-$	$+$	взрыв в $-\infty$
2 3	2 3	A B	A B	$+$	$-$	ветвление в нуле
2 3	2 3	A B	C	$+$	$+$	решение отрицательно
2 3	2 3	C	A B	$+$	$+$	решение положительно
2 3	2 3	C	C	$-$	$+$	взрыв в $-\infty$ или $+\infty$

Табл. 5.3. Существование и единственность решения в случае, если нуль — единственная особая точка. Начальная точка равна нулю.

(iii) *Существование.* Из результатов параграфа 2.3 вытекает существование решения R_0 с $X_0 = 0$, определенного до T_{-1}. Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве теорем 2.8б и 2.8е (ii), строим решение R_{-1} с $X_0 = -1$, определенное до ∞. Обозначим через R'_{-1} образ меры R_{-1} при отображении $\omega \mapsto \omega+1$. Мы рассматриваем R'_{-1} как меру на $C_0(\mathbb{R}_+)$. Положим $\widetilde{\mathsf{R}}_0 = \mathsf{R}_0 \circ \Phi_{T_{-1}}^{-1}$ (Φ задается равенством (B.1)). Пусть Q_0 — образ меры $\widetilde{\mathsf{R}}_0 \times \mathsf{R}'_{-1}$ при отображении

$$C(\mathbb{R}_+) \times C_0(\mathbb{R}_+) \ni (\omega_1, \omega_2) \longmapsto G(\omega_1, \omega_2, T_{-1}(\omega_1)) \in C(\mathbb{R}_+).$$

Используя лемму B.9, можно проверить, что Q_0 является решением (2) с $X_0 = 0$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве теорем 4.1а, 4.1б, заключаем, что существует решение Q с $X_0 = x_0$, определенное до T_0. Для этого решения $\mathsf{Q}(T_0 < \infty) > 0$. Положим $\widetilde{\mathsf{Q}} = \mathsf{Q} \circ \Phi_{T_0}^{-1}$ (Φ задается равенством (B.1)). Обозначим через P образ меры $\widetilde{\mathsf{Q}} \times \mathsf{Q}_0$ при отображении

$$C(\mathbb{R}_+) \times C_0(\mathbb{R}_+) \ni (\omega_1, \omega_2) \longmapsto G(\omega_1, \omega_2, T_0(\omega_1)) \in C(\mathbb{R}_+).$$

Используя лемму B.9, можно проверить, что P является решением (2).

Единственность. Единственность решения вытекает из теоремы 3.2б (ii) и леммы B.6, примененной к моментам остановки $T_{-n,n}$.

Свойства $\mathsf{P}(T_0 < \infty) > 0$ и $X \leqslant 0$ на $[\![T_0, \infty[\![$ P-п.н. вытекают из построения решения.

(iv) Предположим, что существует решение P. Для любого $a > x_0$ мера $\mathsf{P}|\mathcal{F}_{T_{0,a}}$ является решением до $T_{0,a}$. Применяя результаты параграфа 2.3, заключаем, что $\mathsf{P}(T_0 < \infty) > 0$. Положим $\mathsf{P}' = \mathsf{P}(\,\cdot \mid T_0 < \infty)$, $\mathsf{P}_0 = \mathsf{P}' \circ \Theta_{T_0}^{-1}$, где Θ задается равенством (B.2). По лемме B.7, P_0 является решением (2) с $X_0 = 0$. Значит, $\mathsf{P}_0|\mathcal{F}_{T_{-1,1}}$ является решением с $X_0 = 0$, определенным до $T_{-1,1}$. Применяя теорему 3.2б (i), заключаем, что $X \leqslant 0$ на $[\![0, T_{-1}]\!]$ P_0-п.н. Кроме того, $\mathsf{P}_0(\forall t \geqslant T_0,\ X_t = 0) = 0$ (см. доказательство теоремы 3.2a). Следовательно, существует $c < 0$ такое, что $\mathsf{P}_0(T_c < \infty) > c$. Рассмотрим $\mathsf{P}'_0 = \mathsf{P}_0(\,\cdot \mid T_c < \infty)$, $\mathsf{P}'_c = \mathsf{P}'_0 \circ \Theta_{T_c}^{-1}$. По лемме B.7, P'_c является решением (2) с $X_0 = c$. Но это противоречит утверждению (i) настоящей теоремы.

(v) *Существование.* Используя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.8б, получаем существование положительного решения P.

Единственность. Допустим, что существует другое решение P'. Тогда для любого $n > x_0$ мера $\mathsf{P}'|\mathcal{F}_{T_n}$ является решением до T_n. Из результатов параграфа 2.3 вытекает, что решение $\mathsf{P}'|\mathcal{F}_{T_n}$ положительно. По теореме 2.8б, $\mathsf{P}'|\mathcal{F}_{T_n} = \mathsf{P}|\mathcal{F}_{T_n}$. Из леммы B.6 следует, что $\mathsf{P}' = \mathsf{P}$.

Свойство $\mathsf{P}(T_0 < \infty) > 0$ следует из теоремы 2.8б.

(vi) Те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 2.8б, позволяют заключить, что существует положительное решение P.

Рассуждая так же, как и при доказательстве утверждения (iii), строим решение P' такое, что $\mathsf{P}'(T_0 < \infty) > 0$ и $X \leqslant 0$ на $[\![T_0, \infty[\![$ P'-п.н. Кроме того, $\mathsf{P}'(\forall t \geqslant T_0,\ X_t = 0) = 0$ (см. доказательство теоремы 3.2a). Значит, P' не является положительным, так что P и P' — два различных решения.

(vii) *Существование.* Используя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.8б, заключаем, что существует положительное решение P.

Единственность. Предположим, что существует другое решение P'. Предположим сначала, что оно не является положительным. Тогда существует $c < 0$ такое, что $\mathsf{P}(T_c < \infty) > 0$. Положим $\mathsf{P}' = \mathsf{P}(\,\cdot \mid T_c < \infty)$, $\mathsf{P}_c = \mathsf{P}' \circ \Theta_{T_c}^{-1}$. По лемме B.7, P_c является решением (2) с $X_0 = c$. Но это противоречит утверждению (i) настоящей теоремы.

Теперь предположим, что P' положительно. По теореме 2.8б, для любого $n > x_0$ имеем $\mathsf{P}'|\mathcal{F}_{T_n} = \mathsf{P}|\mathcal{F}_{T_n}$. Из леммы B.6 вытекает, что $\mathsf{P}' = \mathsf{P}$.

Свойство $\mathsf{P}(T_0 < \infty) > 0$ следует из теоремы 2.8б.

(viii) *Существование.* Используя те же рассуждения, что и при доказательстве теорем 2.8д–2.8ж, заключаем, что существует строго положительное решение P.

Единственность. Допустим, что существует другое решение P'. Из результатов параграфа 2.3 вытекает, что для любого $n > x_0$ выполнено $\mathsf{P}'|\mathcal{F}_{T_n} = \mathsf{P}|\mathcal{F}_{T_n}$. По лемме B.6, $\mathsf{P}' = \mathsf{P}$.

(ix) Утверждение следует из теоремы 2.8г. □

`Доказательство теоремы 5.1в.` **(i)** Утверждение следует из теоремы 3.2а.

(ii) Доказательство проводится так же, как в теореме 5.1б (v).

(iii) Предположим, что существует решение P. Из результатов параграфа 2.3 вытекает, что это решение положительно. Кроме того, $\mathsf{P}(\forall t \geqslant 0, X_t = 0) = 0$ (см. доказательство теоремы 3.2а). Следовательно, существует $a > 0$ такое, что $\mathsf{P}(T_a < \infty) > 0$. Положим $\mathsf{P}' = \mathsf{P}(\,\cdot \mid T_a < \infty)$, $\mathsf{P}_a = \mathsf{P}' \circ \Theta_{T_a}^{-1}$. По лемме B.7, P_a является решением (2) с $X_0 = a$. Но это противоречит теореме 5.1б (i).

(vi) Используя те же рассуждения, что и в параграфе 2.4, можем построить как положительное, так и отрицательное решение.

(vii) Доказательство проводится так же, как в теореме 5.1б (vii).

(ix) Утверждение проверяется так же, как утверждение (iii). □

§ 5.3 Инвариантные распределения: результаты

В этом параграфе мы исследуем инвариантные распределения для СДУ (2). Полученный результат применим к уравнениям с произвольным набором особых точек (в частности, уравнение может иметь любое количество изолированных особых точек, а также особые точки, не являющиеся изолированными).

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — интервал (открытый, замкнутый или полуоткрытый). Предполагаем, что I состоит из более чем одной точки. Будем использовать функции

$$\rho(x) = \exp\biggl(-\int^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}\,dy\biggr), \quad x \in \mathring{I} \tag{5.1}$$

$$s(x) = \int^x \rho(y)dy, \quad x \in \mathring{I}, \tag{5.2}$$

где $\mathring{I}$ обозначает внутренность I, а $\int^x$ обозначает версию неопределенного интеграла. Эти обозначения имеют смысл, если

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathring{I}).$$

Для $f : I \to \mathbb{R}_+$ утверждение "$\int f(x)dx < \infty$ в концевой точке I" означает, что $\int_{U\cap I} f(x)dx < \infty$ для некоторой окрестности U этой точки; утверждение "$\int f(x)dx = \infty$ в концевой точке I" означает, что $\int_{U\cap I} f(x)dx = \infty$ для любой окрестности U этой точки (концевая точка может быть как конечной, так и бесконечной).

Теорема 5.2. *Имеет место эквивалентность* (i) + (ii) $\Leftrightarrow$ (a) + $\cdots$ + (e):

(i) *Для любой начальной точки* $x_0 \in I$ *существует решение* P_{x_0} *уравнения* (2) *с* $\mathsf{P}_{x_0}(\forall t \geqslant 0,\, X_t \in I) = 1$, *и такое решение единственно.*

(ii) *Существует инвариантное распределение* μ *(т.е. для любого* $t \geqslant 0$ $\mathrm{Law}(X_t \mid \mathsf{P}_\mu) = \mu$, *где* $\mathsf{P}_\mu = \int_I \mathsf{P}_x\mu(dx)$*), сосредоточенное на* I *(т.е.* $\mu(I) = 1$*) с* $\operatorname{supp}\mu = \overline{I}$ *(*$\overline{I}$ *обозначает замыкание* I*), и такое распределение единственно.*

(a) *Имеем*

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathring{I}). \tag{5.3}$$

(b) *Имеем*

$$\frac{1}{\rho\sigma^2} \in L^1(I) \tag{5.4}$$

(*т.е.* $\int_I \rho^{-1}(x)\sigma^{-2}(x)dx < \infty$).

(c) *В бесконечных концевых точках* I *имеем*

$$\int \rho(x)dx = \infty. \tag{5.5}$$

(d) *В конечных концевых точках* I , *не принадлежащих* I , *имеем*

$$\int \rho(x)dx = \infty. \tag{5.6}$$

(e) *В конечных концевых точках* I , *принадлежащих* I , *имеем либо*

$$\int \rho(x)dx < \infty, \quad \int \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,dx < \infty, \quad \int \frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)}\,dx = \infty, \tag{5.7}$$

либо

$$\int \rho(x)dx = \infty, \quad \int \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,|s(x)|dx < \infty. \tag{5.8}$$

Если эти условия выполнены, то мера μ , *описанная в* (ii), *имеет вид*

$$\mu(dx) = \frac{c}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,dx, \tag{5.9}$$

где c *— нормирующий множитель. Более того, для любого распределения* ν , *сосредоточенного на* I , *имеем*

$$\mathrm{Law}(X_t \mid \mathsf{P}_\nu) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathrm{Var}} \mu,$$

где $\mathsf{P}_\nu = \int_I \mathsf{P}_x \nu(dx)$.

Замечания. (i) Функции b и σ не обязательно должны быть заданы на всей вещественной прямой; достаточно задать их лишь на I .

(ii) В случае, когда $I = \mathbb{R}$, условие (5.3) есть условие Энгельберта–Шмидта (см. предложение 1.27).

(iii) Условие (c) означает, что бесконечные концевые точки I должны иметь тип A. Условие (d) означает, что конечные концевые точки I , не принадлежащие I, должны иметь внутренний тип 3 или 5 (внутренний тип — это правый тип для левой концевой точки и левый тип для правой концевой точки). Условие (e) означает, что конечные концевые точки I, принадлежащие I, должны иметь внутренний тип 2 или 3.

(iv) Предположим, что условия теоремы 5.2 выполнены. Обозначим через $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ решения, описанные в пункте (i) теоремы. Тогда $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ — регулярное непрерывное строго марковское семейство (строго марковское свойство можно проверить при помощи стандартной процедуры, предложенной в [68; Th. 6.2], в то время как свойство регулярности можно вывести из явной конструкции P_x, описанной в доказательстве ниже). Кроме того, можно проверить, что функция шкалы семейства $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ есть s, а мера скорости этого семейства есть мера μ, заданная равенством (5.9).

Следствие 5.3 (процесс Кокса–Ингерсола–Росса). *Пусть $b, c, \sigma > 0$. Рассмотрим СДУ*

$$dX_t = (b - cX_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t. \tag{5.10}$$

Для любой начальной точки $x_0 \geqslant 0$ существует положительное решение (5.10), *и такое решение единственно. Существует инвариантное распределение с носителем $\mathbb{R}_+$, и такое распределение единственно. Оно имеет вид*

$$\mu(dx) = c\, x^{2b/\sigma^2-1}\, e^{-2bx/\sigma^2}\, I(x>0)\, dx,$$

где c — нормирующий множитель. Для любой вероятностной меры ν, сосредоточенной на $\mathbb{R}_+$, имеем

$$\mathrm{Law}(X_t \mid \mathsf{P}_\nu) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathrm{Var}} \mu.$$

§ 5.4 Инвариантные распределения: доказательства

`Доказательство теоремы 5.2.` **(a)** + ⋯ + **(e)** ⇒ **(i)** Докажем сначала существование P_{x_0}. Проведем доказательство лишь для случая, когда I — компактный интервал, условие (5.7) выполнено в его левой точке и условие (5.8) выполнено в его правой точке. В остальных случаях доказательство аналогично.

Предположим сначала, что x_0 не совпадает с правой концевой точкой I. Без ограничения общности, можем предположить, что левая концевая точка I есть 0 и $s(0) = 0$, где s определяется равенством (5.2). Пусть B — броуновское движение, выходящее из $s(x_0)$. Положим

$$\varphi_t = \inf\left\{u \geqslant 0 : \int_0^u I(B_s > 0)ds > t\right\}, \quad U_t = B_{\tau_t}, \quad t \geqslant 0.$$

Как известно, U является броуновским движением с отражением в нуле (см. [20; § 2.11]), и следовательно,

$$U_t = s(x_0) + W_t + L_t^0(U), \quad t \geqslant 0,$$

где W — $(\mathcal{F}_t^U)$-броуновское движение, а $L_t^0(U)$ обозначает локальное время процесса U, проведенное в нуле до момента t.

Положим

$$\varkappa(y) = \rho(s^{-1}(y))\sigma(s^{-1}(y)), \quad y \in s(I) \tag{5.11}$$

и рассмотрим

$$\psi_t = \inf\left\{u \geqslant 0 : \int_0^u \frac{1}{\varkappa^2(U_s)}ds > t\right\}, \quad t \geqslant 0,$$
$$V_t = U_{\psi_t} = s(x_0) + W_{\psi_t} + L_{\psi_t}^0(U), \quad t \geqslant 0.$$

Согласно предложению A.16, процесс $M_t = W_{\psi_t}$ является непрерывным $(\mathcal{F}_{\tau_t+}^U)$-локальным мартингалом (здесь $\mathcal{F}_{t+}^U = \bigcap_{\varepsilon>0}\sigma(U_s;\ s \leqslant t+\varepsilon)$) с

$$\langle M\rangle_t = \psi_t = \int_0^{\psi_t} \frac{\varkappa^2(U_s)}{\varkappa^2(U_s)}\,ds = \int_0^t \varkappa^2(V_s)ds, \quad t \geqslant 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f(y) = \begin{cases} s^{-1}(y), & \text{если } \ y > 0, \\ 0, & \text{если } \ y \leqslant 0. \end{cases}$$

Функции f и f' абсолютно непрерывны на $(0,\infty)$ и

$$f'(y) = \frac{1}{\rho(s^{-1}(y))}, \quad f''(y) = \frac{2b(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}, \quad y > 0.$$

Кроме того, для любого $a > 0$

$$\int_0^a \frac{|2b(s^{-1}(y))|}{\varkappa^2(y)}\,dy = \int_0^{s^{-1}(a)} \frac{|2b(x)|}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,dx < \infty. \tag{5.12}$$

Значит, f' имеет ограниченную вариацию на компактных интервалах. Из равенства (5.12) следует, что существует предел $\lim_{y\downarrow 0} f'(y) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{\rho(x)}$. Принимая во внимание (5.7), получаем, что этот предел равен нулю. По формуле Ито–Танака и формуле для времен пребывания,

$$\begin{aligned} f(V_t) &= \int_0^t f'_-(V_s)dM_s + \int_0^t f'_-(V_s)dL^0_{\psi_s}(U) + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2b(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\,L^y_t(V)dy \\ &= N_t + \int_0^{\psi_t} f'_-(U_s)dL^0_s(U) + \int_0^t b(s^{-1}(V_s))ds \\ &= N_t + \int_0^t b(f(V_s))ds, \quad t \geqslant 0 \end{aligned}$$

(на последнем шаге мы воспользовались равенством $f'_-(0) = 0$). Здесь N — непрерывный $(\mathcal{F}^V_t)$-локальный мартингал с

$$\langle N\rangle_t = \int_0^t \frac{\varkappa^2(V_s)}{\rho^2(s^{-1}(V_s))}\,ds = \int_0^t \sigma^2(f(V_s))ds, \quad t \geqslant 0.$$

В результате, мера $\mathsf{P} = \mathrm{Law}(f(V_t);\, t \geqslant 0)$ является решением (2).

Предположим теперь, что x_0 совпадает с правой точкой r интервала I. Фиксируем $a \in \mathring{I}$. По теореме 2.8e, существует решение Q до T_a с начальной точкой r (T_a определяется равенством (2.10)). Из рассуждений выше следует, что существует решение R с начальной точкой a. Пусть P_r — образ $\mathsf{Q} \times \mathsf{R}$ при отображении

$$C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+) \ni (\omega_1, \omega_2) \longmapsto G(\omega_1, \omega_2, T_a(\omega_1)) \in C(\mathbb{R}_+),$$

где G — функция склеивания, определенная равенством

$$G(\omega_1, \omega_2, T)(t) = \begin{cases} \omega_1(t), & \text{если } t < T, \\ \omega_2(t-T), & \text{если } t \geqslant T. \end{cases}$$

Тогда P_r — решение с начальной точкой r (это вытекает из леммы B.10).

Докажем теперь единственность P_{x_0}. Без ограничения общности, можем предположить, что x_0 не является правой концевой точкой I (иначе она не является левой концевой точкой). Предположим, что существуют два разных решения P_{x_0} и $\widetilde{\mathsf{P}}_{x_0}$. Фиксируем $a \in \overset{\circ}{I}$ такое, что $a > x_0$. Из результатов параграфов 2.3 и 4.1 следует, что $\mathsf{P}_{x_0} \mid \mathcal{F}_{T_a} = \widetilde{\mathsf{P}}_{x_0} \mid \mathcal{F}_{T_a}$ и $T_a < \infty$ P_{x_0}, $\widetilde{\mathsf{P}}_{x_0}$-п.н. Обозначим через $(\mathsf{Q}_\omega)_{\omega \in C(\mathbb{R}_+)}$ (соответственно, $(\widetilde{\mathsf{Q}}_\omega)_{\omega \in C(\mathbb{R}_+)}$) условное P_{x_0}-распределение (соответственно, $\widetilde{\mathsf{P}}_{x_0}$-распределение) относительно $\mathcal{F}_{T_a}$. Обозначим через R_ω (соответственно, $\widetilde{\mathsf{R}}_\omega$) образ Q_ω (соответственно, $\widetilde{\mathsf{Q}}_\omega$) относительно отображения

$$C(\mathbb{R}_+) \ni f \longmapsto g \in C(\mathbb{R}_+), \quad g(t) = f(t + T_a(f)).$$

Тогда для P_{x_0}-п.в. (соответственно, $\widetilde{\mathsf{P}}_{x_0}$-п.в.) ω мера R_ω (соответственно, $\widetilde{\mathsf{R}}_\omega$) является решением уравнения (2) с начальной точкой a. Из результатов параграфов 2.3 и 4.1 следует, что существует единственное решение R до T_{x_0} с начальной точкой a. Следовательно, для P_{x_0}-п.в. (соответственно, $\widetilde{\mathsf{P}}_{x_0}$-п.в.) ω имеем $\mathsf{R}_\omega \mid \mathcal{F}_{T_{x_0}} = \mathsf{R}$ (соответственно, $\widetilde{\mathsf{R}}_\omega \mid \mathcal{F}_{T_{x_0}} = \mathsf{R}$). В результате $\mathsf{P}_{x_0} \mid \mathcal{F}_S = \widetilde{\mathsf{P}}_{x_0} \mid \mathcal{F}_S$, где $S = \inf\{t \geqslant T_a : X_t = x_0\}$. Продолжая эти рассуждения, заключаем, что для любого n $\mathsf{P}_{x_0} \mid \mathcal{F}_{S_n} = \widetilde{\mathsf{P}}_{x_0} \mid \mathcal{F}_{S_n}$, где $S_0 = S$,

$$S_{n+1} = \inf\{t \geqslant \tau_{n+1} : X_t = x_0\}, \quad \tau_{n+1} = \inf\{t \geqslant S_n : X_t = a\}.$$

Поскольку $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, заключаем, что $\mathsf{P}_{x_0} = \widetilde{\mathsf{P}}_{x_0}$.

(a) $+ \dots +$ **(e)** $\Rightarrow$ **(ii)** Предположим сначала, что $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ и обозначим через P_{x_0} решение, описанное в (i). Из приведенной выше явной конструкции решения следует, что

$$\mathsf{P}_{x_0} = \mathrm{Law}\bigl(s^{-1}(B_{\tau_t});\, t \geqslant 0\bigr), \tag{5.13}$$

где B — броуновское движение, выходящее из $s(x_0)$, s определяется равенством (5.2),

$$\tau_t = \left\{u \geqslant 0 : \int_0^u \frac{I(B_s \in J)}{\varkappa^2(B_s)}\, ds > t\right\}, \quad t \geqslant 0,$$

$J = s(I)$, а $\varkappa$ определяется равенством (5.11). Рассмотрим меру ν на J, определенную по формуле $\nu(dy) = \frac{c}{\varkappa^2(y)}\, dy$, где c — нормирующий множитель. Существование такого множителя вытекает из (5.4) и равенства

$$\int_J \frac{1}{\varkappa^2(y)}\, dy = \int_I \frac{1}{\rho(x)\sigma^2(x)}\, dx.$$

Известно (см. [64; Th. 54.5]), что $\mathrm{Law}(B_{\tau_t}) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathrm{Var}} \nu$. Поэтому

$$\mathrm{Law}(X_t \mid \mathsf{P}_{x_0}) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathrm{Var}} \mu, \tag{5.14}$$

где μ — мера на I, заданная равенством (5.9).

Предположим теперь, что x_0 — концевая точка I. Для любых $a \in I$ и $t \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned}\int_0^t I(X_s = a) ds &= \int_0^t \frac{I(X_s = a)}{\sigma^2(X_s)}\, d\langle X\rangle_s \\ &= \int_I \frac{I(x = a)}{\sigma^2(x)}\, L_t^x(X) dx = 0 \quad \mathsf{P}_{x_0}\text{-п.н.}\end{aligned} \tag{5.15}$$

Поэтому для п.в. (по мере Лебега) $t \geqslant 0$ имеем $\mathsf{P}_{x_0}(X_t = a) = 0$. Принимая во внимание марковское свойство семейства $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ (см. [68; Th. 6.2]), получаем, что (5.14) выполнено для любого $x_0 \in I$. Для любых $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ имеем согласно марковскому свойству

$$\mathrm{Law}(X_{t+s} \mid \mathsf{P}_\mu) = \mathrm{Law}(X_s \mid \mathrm{Law}(X_t \mid \mathsf{P}_\mu)).$$

Устремляя $t \to \infty$ и учитывая (5.14), получаем, что $\mathrm{Law}(X_s \mid \mathsf{P}_\mu) = \mu$, так что мера μ инвариантна. Единственность инвариантного распределения немедленно вытекает из (5.14).

(i) + (ii) ⇒ (a) Предположим, что существует $a \in \overset{\circ}{I}$ такое, что

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \notin L^1_{\mathrm{loc}}(a). \tag{5.16}$$

Без ограничения общности, $a = 0$.

Пусть P_0 — решение, описанное в (i). Проверим сначала, что для любого $t \geqslant 0$ $L^0_t(X) = 0$ P-п.н. (ср. с [43; Th. 2.3]). Имеем

$$\int_0^t I(X_s = 0)dX_s = \int_0^t I(X_s = 0)b(X_s)ds + \int_0^t I(X_s = 0)dM_s,$$

где M определено в (1.1). Процесс $N_t = \int_0^t I(X_s = 0)dM_s$ является непрерывным $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P}_0)$-локальным мартингалом с

$$\langle N\rangle_t = \int_0^t I(X_s = 0)\sigma^2(X_s)ds.$$

Учитывая (5.15), получаем, что $\int_0^t I(X_s = 0)dX_s = 0$ P_0-п.н., и, следовательно (см. равенство (A.1)), $L^0_t(X) = L^{0-}_t(X)$ P_0-п.н. Используя теперь равенство

$$\begin{aligned}\int_0^t (1+|b(X_s)|)ds &= \int_0^t \frac{1+|b(X_s)|}{\sigma^2(X_s)}\, d\langle X\rangle_s \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1+|b(x)|}{\sigma^2(x)}\, L^x_t(X)dx \quad \mathsf{P}_0\text{-п.н.},\end{aligned}$$

получаем $L^0_t(X) = 0$ P_0-п.н.

Предположим теперь, что

$$\mathsf{P}_0(\exists t > 0 : X_t > 0) > 0, \quad \mathsf{P}_0(\exists t > 0 : X_t < 0) > 0. \tag{5.17}$$

По формуле Танака,

$$X^+_t = \int_0^t I(X_s > 0)b(X_s)ds + \int_0^t I(X_s > 0)dM_s, \quad t \geqslant 0.$$

Положим

$$A_t = \int_0^t I(X_s > 0)ds, \quad \tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\}, \quad t \geqslant 0$$

и рассмотрим

$$Y_t = \begin{cases} X^+_{\tau_t}, & \text{если } \ t < A_\infty, \\ 0, & \text{если } \ t \geqslant A_\infty. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_0^{\tau_t} I(X_s > 0) b(X_s) ds + \int_0^{\tau_t} I(X_s > 0) dM_s \\ &= \int_0^{t \wedge A_\infty} b(Y_s) ds + K_t, \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Процесс K является непрерывным $(\mathcal{F}_{\tau_t}, \mathsf{P}_0)$-локальным мартингалом с

$$\langle K \rangle_t = \int_0^{\tau_t} I(X_s > 0) \sigma^2(X_s) ds = \int_0^{t \wedge A_\infty} \sigma^2(Y_s) ds, \quad t \geqslant 0.$$

Пусть теперь (Y^1, A^1_∞), $(Y^2, A^2_\infty), \dots$ — независимые копии (Y, A_∞). Положим

$$Z_t = \begin{cases} Y^1_t, & \text{если } \ t < A^1_\infty, \\ Y^2_{t - A^1_\infty}, & \text{если } \ A^1_\infty \leqslant t < A^1_\infty + A^2_\infty, \\ \dots \end{cases}$$

Можно проверить, что мера $\widetilde{\mathsf{P}}_0 = \mathrm{Law}(Z_t;\, t \geqslant 0)$ является положительным решением (2) с начальной точкой 0. Из (i) вытекает, что $\widetilde{\mathsf{P}}_0 = \mathsf{P}_0$, но это противоречит (5.17). Следовательно, P_0 должно быть либо положительным, либо отрицательным.

Без ограничения общности, можем предположить, что P_0 положительно. Пусть μ — инвариантное распределение, описанное в (ii). Положим

$$\overline{\mu}(dx) = I(x \geqslant 0) \mu(dx), \quad \overline{\mu}_t = \int_I \mathrm{Law}(X_t \mid \mathsf{P}_x) \overline{\mu}(dx).$$

Поскольку P_0 положительно, из строго марковского свойства $(\mathsf{P}_x)_{x \in I}$ (см. [68; Th. 6.2]) получаем, что никакая часть массы $\overline{\mu}$ не может покинуть $I \cap \mathbb{R}_+$. Следовательно, $\overline{\mu}_t(\mathbb{R}_+) \geqslant \overline{\mu}(\mathbb{R}_+)$. С другой стороны, из инвариантности μ следует, что $\overline{\mu}_t|_{\mathbb{R}_+} \leqslant \mu|_{\mathbb{R}_+} = \overline{\mu}|_{\mathbb{R}_+}$. Поэтому $\overline{\mu}_t = \overline{\mu}$.

Это означает, что любое распределение вида $\alpha\overline{\mu} + \beta\mu$ инвариантно. Полученное противоречие показывает, что (5.16) неверно.

(i) + (ii) ⇒ (c) Предположим теперь, что правая точка I есть $+\infty$ и $\int \rho(x)dx < \infty$ в окрестности $+\infty$. Возьмем произвольное $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Из теоремы 2.8б следует, что $\mathsf{P}_{x_0}(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty) > 0$. Для любого $y \geqslant x_0$ имеем согласно строго марковскому свойству $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$:

$$\mathsf{P}_{x_0}\Big(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty\Big) = \mathsf{P}_{x_0}(T_y < \infty)\mathsf{P}_y\Big(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty\Big)$$

(T_y определяется равенством (2.10)). Следовательно, для любого $y \geqslant x_0$

$$\mathsf{P}_y\Big(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty\Big) \geqslant \mathsf{P}_{x_0}\Big(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty\Big).$$

Но это противоречит существованию инвариантного распределения с носителем $\overline{I}$.

(i) + (ii) ⇒ (d) Предположим, что начальная точка I есть нуль, и она не принадлежит I. Из результатов параграфа 2.3 ясно, что нуль не может иметь правый тип 0, 1, 2, 6, поскольку иначе нарушится условие $\mathsf{P}_{x_0}(\forall t \geqslant 0, X_t > 0) = 1$. Если нуль имеет правый тип 4, то $\mathsf{P}_{x_0}(\lim_{t\to\infty} X_t = 0) > 0$, и, применяя те же рассуждения, что и выше, приходим к противоречию с (ii). В результате, нуль может иметь только правый тип 3 или 5, что и есть утверждение (d).

(i) + (ii) ⇒ (e) Предположим, что левая концевая точка I есть нуль, и она принадлежит I. Из результатов параграфа 2.3 ясно, что нуль не может иметь левый тип 1, 4, 5, 6, поскольку иначе решение с начальной точкой 0 было бы отрицательно.

Предположим, что нуль имеет правый тип 0. Заметим, что в этом случае

$$\int \frac{1 + |b(x)|}{\sigma^2(x)}\, dx < \infty$$

в окрестности нуля. Без ограничения общности, можем предположить, что $s(0) = 0$, где s задается равенством (5.2). Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} s(x), & \text{если } x > 0, x \in I, \\ \rho(0+)x, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

По формуле Ито–Танака,

$$\begin{aligned} f(X_t) &= \int_0^t \rho(X_s)b(X_s)ds + \int_0^t \rho(X_s)dM_s - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{2b(x)}{\sigma^2(x)}\rho(x)L_t^x(X)dx \\ &= \int_0^t \rho(X_s)dM_s, \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Итак, $f(X)$ является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P}_0)$-локальным мартингалом, где P_0 — решение, описанное в (i). Поскольку $f(X_0) = 0$ и $f(X) \geqslant 0$, получаем $f(X) = 0$ P_0-п.н. Это означает, что $X = 0$ P_0-п.н., но это противоречит свойству (5.15). Итак, нуль не может иметь правый тип 0. В результате нуль может иметь только правый тип 2 или 3, что и есть утверждение (e).

(i) + (ii) $\Rightarrow$ (b) Мы уже доказали, что (i) + (ii) $\Rightarrow$ (a) + (c) + (d) + (e). Рассуждения, использованные при доказательстве импликации (a)$+\dots+$(e) $\Rightarrow$ (i) (где мы использовали лишь (a), (c), (d) и (e)), показывают, что для $x_0 \in \mathring{I}$ выполнено свойство (5.13).

Выберем функции $f : J \to \mathbb{R}_+$, $g : J \to \mathbb{R}_+$ такие, что f и g ограничены, $f \leqslant \alpha g$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ и

$$\int_J \frac{f(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\,dy < \infty, \quad 0 < \int_J \frac{g(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\,dy < \infty.$$

Из эргодической теоремы для одномерных диффузионных процессов (см. [64; Ch. V, Th. 53.1]) следует, что

$$\frac{\displaystyle\int_0^t f(s^{-1}(B_{\tau_s}))ds}{\displaystyle\int_0^t g(s^{-1}(B_{\tau_s}))ds} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} \frac{\displaystyle\int_J \frac{f(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\,dy}{\displaystyle\int_J \frac{g(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\,dy} = \frac{\displaystyle\int_I \frac{f(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,dx}{\displaystyle\int_I \frac{g(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,dx}.$$

Поэтому

$$\frac{\displaystyle\int_0^t f(X_s)ds}{\displaystyle\int_0^t g(X_s)ds} \xrightarrow[t\to\infty]{\mathsf{P}_\mu\text{-п.н.}} \frac{\displaystyle\int_I \frac{f(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,dx}{\displaystyle\int_I \frac{g(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,dx}. \tag{5.18}$$

С другой стороны,

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_\mu}\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds = \int_I f(x)\mu(dx),$$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_\mu}\frac{1}{t}\int_0^t g(X_s)ds = \int_I g(x)\mu(dx).$$

С учетом (5.18) и свойств f и g, это означает, что

$$\int_I f(x)\mu(dx) = \frac{\displaystyle\int_I \frac{f(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,dx}{\displaystyle\int_I \frac{g(x)}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,dx}\int_I g(x)\mu(dx).$$

В итоге,

$$\mu(dx) = \frac{c}{\rho(x)\sigma^2(x)}\,dx$$

с некоторой константой c, откуда вытекает (b). □

Приложение A

Некоторые известные факты

В этом приложении приводятся некоторые факты из стохастического анализа, используемые в доказательствах.

§ A.1 Локальные времена

Большая часть утверждений этого параграфа взята из [63; Ch. VI, §§ 1, 2] (также см. [64; Ch. IV, §§ 43–45]).

На протяжении этого параграфа $Z = (Z_t;\, t \geqslant 0)$ обозначает непрерывный семимартингал на фильтрованном вероятностном пространстве $\bigl(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q}\bigr)$.

Предложение A.1. *Для любого $a \in \mathbb{R}$ существует непрерывный возрастающий процесс $L^a(Z) = (L^a_t(Z);\, t \geqslant 0)$ такой, что*

$$(Z_t - a)^+ = (Z_0 - a)^+ + \int_0^t I(Z_s > a)dZ_s + \frac{1}{2}L^a_t(Z), \quad t \geqslant 0.$$

Определение A.2. *Процесс $L^a(Z)$ называется* локальным временем *процесса Z в точке a.*

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — некоторый интервал (открытый, замкнутый или полуоткрытый). Предположим, что функция $f : I \to \mathbb{R}$ является разностью двух выпуклых функций и f непрерывна. Тогда для любого x из внутренности интервала I существует левосторонняя производная $f'_-(x)$ и правосторонняя производная $f'_+(x)$. Кроме того, существует вторая производная f'' в смысле распределений. Это знакопеременная мера на I такая, что для любых a, b из внутренности I выполнено $f'_-(b) - f'_-(a) = f''([a, b))$. Если левая концевая точка l интервала I принадлежит I, то мы полагаем $f'_-(l) = 0$ и считаем, что мера f'' имеет атом массы $f'_+(l)$ в точке l.

Предложение А.3 (Формула Ито–Танака). *Предположим, что* Z *п.н. принимает значения из* I, $f : I \to \mathbb{R}$ *является разностью двух выпуклых функций, причем* f *непрерывна. Предположим также, что мера* f'' *конечна на компактных подмножествах* I. *Тогда*

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'_-(Z_s)dZ_s + \frac{1}{2}\int_I L_t^x(Z)f''(dx), \quad t \geqslant 0.$$

Предложение А.4 (формула для времен пребывания). *Для любой положительной измеримой функции* h *и любого п.н. конечного момента остановки* S *выполнено*

$$\int_0^S h(Z_s)d\langle Z\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} h(x)L_S^x(Z)dx \quad \textit{п.н.}$$

Предложение А.5. *Для любого* a *мера* $dL^a(Z)$ *п.в. сосредоточена на множестве* $\{t \geqslant 0 : Z_t = a\}$.

Предложение А.6. **(i)** *Существует модификация случайного поля* $(L_t^a(Z); a \in \mathbb{R}, t \geqslant 0)$ *такая, что отображение* $(a, t) \mapsto L_t^a(Z)$ *п.н. непрерывно по* t *и непрерывно справа с пределами слева по* a. *Кроме того,*

$$L_t^a(Z) - L_t^{a-}(Z) = 2\int_0^t I(Z_s = a)dZ_s, \quad t \geqslant 0, \tag{A.1}$$

где $L_t^{a-}(Z) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} L_t^{a-\varepsilon}(Z)$.

(ii) *Если* Z *— непрерывный локальный мартингал, то его локальное время допускает непрерывную по паре* (t, a) *модификацию.*

Из предложений А.4 и А.6 (i) вытекает

Следствие А.7. *Для любых* $t \geqslant 0$ *и* $a \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$L_t^a(Z) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t I(a \leqslant Z_s < a + \varepsilon) d\langle Z \rangle_s \quad \text{п.н.}$$

Предложение А.8. *Если* B *— броуновское движение, выходящее из нуля, то для любого* $t > 0$ *имеем* $L_t^0(B) > 0$ *п.н.*

Предложение А.9. *Пусть* B *— броуновское движение, а* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *— борелевская функция такая, что множество* $\{f > 0\}$ *имеет строго положительную меру Лебега. Тогда*

$$\int_0^\infty f(B_s) ds = \infty \quad \text{п.н.}$$

Доказательство можно найти в [63; Ch. X, Prop. 3.11].

Предложение А.10. *Пусть* B *— броуновское движение, выходящее из точки* $a \in \mathbb{R}$. *Возьмем* $c < a$ *и положим*

$$Z_\theta = L_{T_c(B)}^{\theta+c}(B), \quad \theta \geqslant 0,$$

где $T_c(B) = \inf\{t \geqslant 0 : B_t = c\}$.

(i) *Процесс* $(Z_\theta; \theta \in [0, a - c])$ *совпадает по распределению с процессом* $(|W_\theta|^2; \theta \in [0, a - c])$, *где* W *— двумерное броуновское движение, выходящее из нуля.*

(ii) *Для любого* $\theta \geqslant 0$ *имеем* $\mathsf{E} Z_\theta = 2\theta \wedge 2(a - c)$.

Утверждение (i) вытекает из теоремы Рэя–Найта (см. [63; Ch. XI, Th. 2.2]) и свойства самоподобия броуновского движения. Утверждение (ii) взято из [2; (1.2.3.1)].

§ А.2 Замена времени

Большая часть утверждений этого параграфа взята из [63; Ch. V, §1].

Определение А.11. Пусть $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q})$ — фильтрованное вероятностное пространство. Предполагаем, что фильтрация $(\mathcal{G}_t)_{t\geqslant 0}$ непрерывна справа. *Заменой времени* называется семейство $(\tau_t;\, t \geqslant 0)$ моментов остановки такое, что отображения $t \mapsto \tau_t$ п.н. непрерывны справа и возрастают (моменты τ_t могут принимать значение $+\infty$).

Предложение А.12. *Пусть* $(A_t;\, t \geqslant 0)$ *— возрастающий непрерывный справа согласованный процесс на* $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q})$ *(он может принимать значение* $+\infty$*). Положим*

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},$$

где $\inf \varnothing = \infty$*. Тогда* $(\tau_t;\, t \geqslant 0)$ *является заменой времени. Кроме того, фильтрация* $(\mathcal{G}_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$ *непрерывна справа и для любого* $t \geqslant 0$ *случайная величина* A_t *является* $(\mathcal{G}_{\tau_t})$*-моментом остановки.*

Предложение А.13. *Пусть* τ *— п.н. конечная замена времени, а* H *—* $(\mathcal{G}_t)$*-прогрессивно измеримый процесс. Тогда процесс* H_{τ_t} *является* $(\mathcal{G}_{\tau_t})$*-прогрессивно измеримым.*

Замечание. Если H лишь $(\mathcal{G}_t)$-согласован, то H_{τ_t} может не быть $(\mathcal{G}_{\tau_t})$-согласованным.

Определение А.14. Процесс Z называется τ*-непрерывным*, если Z является постоянным на каждом интервале вида $[\tau_{t-}, \tau_t)$. (Будем использовать соглашение $\tau_{0-} = 0$.)

Следующее утверждение часто применяется для проверки τ-непрерывности.

Предложение A.15. *Если M — непрерывный локальный мартингал, то почти наверное интервалы постоянства для M и для $\langle M\rangle$ совпадают, т.е. для п.в. ω имеем: $M_t(\omega) = M_a(\omega)$ для $a \leqslant t \leqslant b$, если и только если $\langle M\rangle_b(\omega) = \langle M\rangle_a(\omega)$.*

Доказательство можно найти в [63; Ch. IV, Prop. 1.13].

Предложение A.16. *Пусть τ — п.н. конечная замена времени, а M — непрерывный $(\mathcal{G}_t)$-локальный мартингал, являющийся τ-непрерывным. Тогда процесс M_{τ_t} является непрерывным $(\mathcal{G}_{\tau_t})$-локальным мартингалом с $\langle M_\tau\rangle_t = \langle M\rangle_{\tau_t}$.*

Предложение A.17 (замена переменных в стохастических интегралах). *Пусть τ — п.н. конечная замена времени, а M — непрерывный $(\mathcal{G}_t)$-локальный мартингал, являющийся τ-непрерывным. Пусть H — $(\mathcal{G}_t)$-прогрессивно измеримый процесс такой, что для любого $t \geqslant 0$*

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty \quad \text{п.н.}$$

Тогда для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^t H_{\tau_s}^2 d\langle M_\tau\rangle_s < \infty \quad \text{п.н.}$$

и

$$\int_0^t H_{\tau_s} dM_{\tau_s} = \int_{\tau_0}^{\tau_t} H_s dM_s \quad \text{п.н.}$$

Предложение A.18 (замена переменных в интегралах Лебега–Стилтьеса). *Пусть $\tau : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $A : \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ — возрастающие непрерывные справа с пределами слева функции, причем A τ-непрерывна. Тогда для любой борелевской функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и любого $t \geqslant 0$ имеем*

$$\int_0^t f(\tau_s) dA_{\tau_s} = \int_{\tau_0}^{\tau_t} f(s) dA_s.$$

Для доказательства этого утверждения нужно сначала рассмотреть функции f вида $I_{[0,a]}$, а затем применить лемму о монотонных классах.

§ А.3 Процессы Бесселя

Рассмотрим СДУ

$$dX_t = \delta dt + 2\sqrt{|X_t|}dB_t, \quad X_0 = x_0^2 \tag{A.2}$$

с $\delta > 0$, $x_0 \geqslant 0$. Из теорем 5.1б и 5.1в следует, что для уравнения

$$dX_t = \delta dt + (2\sqrt{|X_t|} + I(X_t = 0))dB_t, \quad X_0 = x_0^2. \tag{A.3}$$

имеет место слабое существование. (Действительно, по теореме 4.3а, для этого уравнения нуль имеет тип $(1,2)$ при $0 < \delta < 2$ и тип $(1,3)$ при $\delta \geqslant 2$; по теореме 4.6а, $+\infty$ имеет тип A при $0 < \delta \leqslant 2$ и тип B при $\delta > 2$.) Далее, для любого решения P уравнения (A.3) имеем

$$\int_0^t I(X_s = 0)ds = 0 \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

и следовательно, P также является решением (A.2). Предложение 1.22 гарантирует сильную единственность для (A.2). Согласно предложению 1.15, имеют место также сильное существование и слабая единственность (используя терминологию параграфа 1.1, можем сказать, что имеет место наилучшая возможная ситуация). Кроме того, теоремы сравнения (см. [63; Ch. IX, Th. 3.8]) гарантируют, что если (Z,B) — решение СДУ (A.2), то процесс Z положителен.

Определение А.19. Если (Z,B) — решение СДУ (A.2), то Z называется *квадратом процесса Бесселя размерности* δ, *выходящего из точки* x_0^2. Процесс $\rho = \sqrt{Z}$ называется *процессом Бесселя размерности* δ, *выходящим из точки* x_0.

Предложение A.20. *Пусть* ρ *— процесс Бесселя размерности* δ, *выходящий из точки* x_0.

(i) *Если* $\delta \geqslant 2$, *то* $\mathsf{P}(\exists t > 0 : \rho_t = 0) = 0$.

(ii) *Если* $0 < \delta < 2$, *то* $\mathsf{P}(\exists t > 0 : \rho_t = 0) = 1$ *и процесс Бесселя отражается в нуле.*

Доказательство можно найти в [63; Ch. XI, § 1].

Предложение A.21. *Предположим, что* $\delta > 1$ *и* $x_0 \geqslant 0$. *Пусть* (Z, B) *— решение* (A.2) *и* $\rho = \sqrt{Z}$. *Тогда* (ρ, B) *является решением СДУ*

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2X_t} I(X_t \neq 0)dt + dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Доказательство можно найти в [63; Ch. XI, § 1].

Предложение A.22. *Пусть* B *— броуновское движение, выходящее из точки* $a > 0$. *Пусть* ρ *— процесс Бесселя размерности 3, выходящий из нуля. Положим*

$$\begin{aligned} T_0(B) &= \inf\{t \geqslant 0 : B_t = 0\}, \\ U_a(B) &= \sup\{t \leqslant T_0(B) : B_t = a\}, \\ T_a(\rho) &= \inf\{t \geqslant 0 : \rho_t = a\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathrm{Law}\big(B_{T_0(B)-t};\, 0 \leqslant t \leqslant T_0(B) - U_a(B)\big) = \mathrm{Law}\big(\rho_t;\, 0 \leqslant t \leqslant T_a(\rho)\big).$$

Это утверждение вытекает из [63; Ch. VII, Cor. 4.6].

Замечание. Предложение A.22 можно неформально описать следующим образом. Поведение броуновского движения перед моментом, когда оно попадает в нуль, совпадает с поведением обращенного по времени процесса Бесселя размерности 3, выходящего из нуля.

Предложение А.23. *Пусть* ρ *— процесс Бесселя размерности 3, выходящий из нуля, а* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *— борелевская функция такая, что для любого* $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon x f(x) dx = \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon f(\rho_s) ds = \infty \quad \text{п.н.}$$

Доказательство можно найти в [73] или [62].

Из предложений А.22 и А.23 вытекает

Следствие А.24. *Пусть* B *— броуновское движение, выходящее из точки* $a > 0$. *Пусть* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *— борелевская функция такая, что для любого* $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon x f(x) dx = \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_{T_0(B)-\varepsilon}^{T_0(B)} f(B_s) ds = \infty \quad \text{п.н.}$$

§ А.4 Строго марковские семейства

На протяжении этого параграфа X обозначает канонический процесс на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$, а $(\mathcal{F}_t)$ — каноническую фильтрацию на этом пространстве. Через $(\mathcal{F}_t^+)$ обозначим ее правую модификацию, т.е. $\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. Положим $\mathcal{F} = \bigvee_{t\geqslant 0} \mathcal{F}_t$. Для произвольного $(\mathcal{F}_t^+)$-момента остановки S *оператор сдвига* $\Theta_S : \overline{C}(\mathbb{R}_+) \to \overline{C}(\mathbb{R}_+)$ определяется по формуле

$$(\Theta_S\omega)(t) = \begin{cases} \omega(S(\omega)+t), & \text{если } S(\omega) < \infty, \\ \pi, & \text{если } S(\omega) = \infty. \end{cases} \tag{А.4}$$

Отображение Θ_S является $\mathcal{F}|\mathcal{F}$-измеримым (это следует из леммы B.1).

Определение A.25. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — интервал (открытый, замкнутый или полуоткрытый). Семейство мер $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ на $\mathcal{F}$ обладает *строго марковским свойством*, если

(a) для любого $x \in I$

$$\mathsf{P}_x(X_0 = x) = 1, \quad \mathsf{P}_x\big(\forall t \geqslant 0,\ X_t \in I \cup \{\pi\}\big) = 1;$$

(b) для любого $A \in \mathcal{F}$ отображение $x \mapsto \mathsf{P}_x(A)$ является борелевским;

(c) для любого $(\mathcal{F}_t^+)$-момента остановки S, любой положительной $\mathcal{F}$-измеримой функции Ψ и любого $x \in I$ имеем

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_x}[\Psi \circ \Theta_S \mid \mathcal{F}_S^+] = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_{X_S}}\Psi \quad \mathsf{P}_x\text{-п.н.}$$

на множестве $\{X_S \neq \pi\}$.

Определение A.26. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — интервал (открытый, замкнутый или полуоткрытый). Семейство мер $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ на $\mathcal{F}$ обладает *свойством регулярности*, если

(a) для любого $x \in I$ на множестве $\{\xi(X) < \infty\}$ имеем: $\lim_{t\uparrow\xi(X)} X_t$ существует и не принадлежит I P_x-п.н. Другими словами, X может уничтожаться лишь в концевых точках I, не принадлежащих I;

(b) для любого x из внутренности интервала I и любого $y \in I$ имеем $\mathsf{P}_x(\exists t \geqslant 0 : X_t = y) > 0$.

Предложение A.27. *Пусть $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ — регулярное строго марковское семейство. Существует непрерывная строго возрастающая функция $s : I \to \mathbb{R}$ такая, что $s(X^{T_{a,b}})$ является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P}_x)$-локальным мартингалом для любых $a \leqslant x \leqslant b$ из I. Кроме того, функция s определена однозначно с точностью до положительного аффинного преобразования и она удовлетворяет следующему свойству: для любых $a \leqslant x \leqslant b$ из I*

$$\mathsf{P}_x(T_b < T_a) = \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)}.$$

Доказательство можно найти в [56; Th. 20.7] или [63; Ch. VII, Prop. 3.2].

Определение A.28. Функция s с указанными свойствами называется *функцией шкалы* семейства $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$.

Предложение A.29. *Пусть* $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ *— регулярное строго марковское семейство. Существует единственная мера* m *на внутренности* I *такая, что для любой борелевской функции* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ *и любых* $a\leqslant x\leqslant b$ *из* I *выполнено*

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_x}\int_0^{T_{a,b}} f(X_s)ds = 2\int_a^b G_{a,b}(x,y)f(y)m(dy),$$

где

$$G_{a,b}(x,y)=\frac{\big(s(x)\wedge s(y)-s(a)\big)\big(s(b)-s(x)\vee s(y)\big)}{s(b)-s(a)},\quad x,y\in[a,b].$$

Определение A.30. Мера m с указанными свойствами называется *мерой скорости* семейства $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$.

Замечание. Мера m определена однозначно лишь при фиксированном выборе функции шкалы. Если же взять другой вариант $\widetilde{s}(x)=\alpha s(x)+\beta$ функции шкалы, то получим другой вариант $\widetilde{G}=\alpha G$ функции G и другой вариант $\widetilde{m}=m/\alpha$ меры скорости.

Предложение A.31. *Пусть* I *— компактный интервал и* $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ *регулярное строго марковское семейство с функцией шкалы* s *и мерой скорости* m. *Предположим, что концевые точки* l *и* r *интервала* I *являются поглощающими для этого семейства, т.е. для любого* $x\in[a,b]$ *канонический процесс* X *останавливается* P_x*-п.н. в момент* $T_{a,c}$. *Возьмем* $x\in I$. *Пусть* B *— броуновское движение, выходящее из* $s(x)$.

Рассмотрим

$$A_t = \int_{s(I)} L_t^y(B)\nu(dy),$$
$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},$$

где ν *— сумма меры* $m \circ s^{-1}$ *и бесконечных масс, сосредоточенных в точках* $s(l)$ *,* $s(r)$ *. Тогда*

$$\mathsf{P}_x = \mathrm{Law}\big(s^{-1}(B_{\tau_t});\ t \geqslant 0\big).$$

Доказательство можно найти в [56; Th. 20.9] или [64; Ch. VII, Th. 47.1]. Также утверждение можно свести к случаю, когда $s(x) = x$, $x \in I$, и в таком виде оно содержится в [47].

Замечание. Из предложения выше видно, в частности, что семейство $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ однозначно определяется (при описанных выше условиях) функцией s и мерой m .

§ A.5 Прочие утверждения

Предложение A.32 (лемма Скорохода). *Пусть* $Z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *— непрерывная функция такая, что* $Z(0) \geqslant 0$ *. Тогда существует единственная пара функций* (Y, L) *со свойствами:*

(a) $Y = Z + L$;

(b) $Y \geqslant 0$;

(c) L *возрастает, непрерывна, обнуляется в нуле и соответствующая мера* dL *сосредоточена на множестве* $\{t \geqslant 0 : Y(t) = 0\}$ *.*

При этом функция L *имеет явный вид*

$$L(t) = \sup_{s\leqslant t}(-Z(s) \vee 0).$$

Доказательство можно найти в [63; Ch. VI, Lem. 2.1].

Предложение А.33. *Пусть B — броуновское движение, выходящее из нуля. Положим $S_t = \sup_{s \leqslant t} B_s$. Тогда*

$$\mathrm{Law}(S_t - B_t;\, t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(|B_t|;\, t \geqslant 0).$$

Это утверждение вытекает из теоремы Леви (см. [63; Ch. VI, Th. 2.3]).

Предложение А.34. *Пусть $J \subseteq \mathbb{R}$ — интервал, а μ — положительная (но не обязательно конечная) мера на J. Пусть $(Z_t;\, t \in J)$ — случайный процесс с измеримыми траекториями такой, что $\mathsf{E}|Z_t| < \infty$ для любого $t \in J$. Предположим, что существуют константы $\gamma > 1$, $c > 0$, для которых*

$$\mathsf{E}|Z_t|^\gamma \leqslant c(\mathsf{E}|Z_t|)^\gamma, \quad t \in J.$$

Тогда

$$\int_J |Z_t|\mu(dt) < \infty \ \text{ п.н.} \iff \int_J \mathsf{E}|Z_t|\mu(dt) < \infty.$$

Доказательство можно найти в [41].

Определение А.35. Семейство $\mathfrak{M}$ подмножеств пространства Ω называется *монотонным классом*, если выполнены условия:

(a) $\varnothing, \Omega \in \mathfrak{M}$;

(b) если $A, B \in \mathfrak{M}$ и $A \subseteq B$, то $B \setminus A \in \mathfrak{M}$;

(c) если $A, B \in \mathfrak{M}$ и $A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B \in \mathfrak{M}$;

(d) если $(A_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{M}$ и $A_n \subseteq A_{n+1}$, то $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{M}$.

Предложение А.36 (лемма о монотонных классах). *Предположим, что $\mathfrak{A}$ — семейство подмножеств Ω, замкнутое относительно конечных пересечений (т.е. для любых $A, B \in \mathfrak{A}$ имеем $A \cap B \in \mathfrak{A}$). Тогда минимальный монотонный класс, содержащий $\mathfrak{A}$, совпадает с σ-алгеброй, порожденной $\mathfrak{A}$.*

Доказательство можно найти в [34; Гл. 2, § 2].

Приложение B

Некоторые вспомогательные леммы

В этом приложении собраны некоторые технические леммы, используемые в доказательствах.

§ B.1 Моменты остановки

На протяжении этого параграфа $(\mathcal{F}_t)$ обозначает каноническую фильтрацию на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$. Но все результаты применимы также и к пространству $C(\mathbb{R}_+)$.

Лемма B.1. *Пусть S — $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки. Тогда случайная величина $X_S I(S<\infty)$ является $\mathcal{F}_S|\mathcal{B}(\mathbb{R}\cup\{\pi\})$-измеримой.*

Доказательство. Для $\alpha\in\mathbb{R}$ и $t>0$ имеем

$$\{X_S<\alpha\}\cap\{S<t\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q}\cap(0,t)\\|p-q|<1/n}}\{p<S<q\}\cap\{X_p\leqslant\alpha-1/m\}\in\mathcal{F}_t.$$

Следовательно,

$$\{X_S<\alpha\}\cap\{S\leqslant t\}=\big(\{X_S<\alpha\}\cap\{S<t\}\big)\cup\big(\{X_t<\alpha\}\cap\{S=t\}\big)\in\mathcal{F}_t.$$

Далее,

$$\{X_S=\pi\}\cap\{S\leqslant t\}=\{S\leqslant t\}\setminus\big(\{X_S\in\mathbb{R}\}\cap\{S\leqslant t\}\big)\in\mathcal{F}_t.$$

Поэтому для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{\pi\})$ имеем

$$\{X_S \in A\} \cap \{S \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Это приводит к требуемому утверждению. □

Пусть S — $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки и $\omega \in \overline{C}(\mathbb{R}_+)$. Рассмотрим *оператор остановки* $\Phi_S : \overline{C}(\mathbb{R}_+) \to \overline{C}(\mathbb{R}_+)$, определенный по формуле

$$(\Phi_S \omega)(t) = \omega(t \wedge S(\omega)), \quad t \geqslant 0. \tag{B.1}$$

Предложение B.2. *Пусть* S — $(\mathcal{F}_t)$*-момент остановки и* $A \in \mathcal{F}$*. Тогда* $A \in \mathcal{F}_S$*, если и только если* $A = \{\omega : \omega^S \in A\}$*.*

Доказательство можно найти в [32; Гл. I, § 2].

Лемма B.3. *Пусть* S — $(\mathcal{F}_t)$*-момент остановки и* P — *вероятностная мера на* $\mathcal{F}_S$*. Тогда отображение* Φ_S *является* $\mathcal{F}_S|\mathcal{F}$*-измеримым. Кроме того,* $(\mathsf{P} \circ \Phi_S^{-1})|\mathcal{F}_S = \mathsf{P}$*.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из леммы B.1.

Для доказательства второго утверждения фиксируем $A \in \mathcal{F}_S$. Используя предложение B.2, можем написать

$$\mathsf{P} \circ \Phi_S^{-1}(A) = \mathsf{P}(\omega : \omega^S \in A) = \mathsf{P}(A).$$

□

Предложение B.4 (тест Гальмарино). *Измеримое отображение* $S : \overline{C}(\mathbb{R}_+) \to [0, \infty]$ *является* $(\mathcal{F}_t)$*-моментом остановки, если и только если из условий*

$$S(\omega) = t,$$
$$\omega(s) = \omega'(s), \quad s \leqslant t$$

вытекает, что $S(\omega') = t$*.*

Доказательство можно найти в [32; Гл. I, § 2].

§ B.2 Меры и решения

Лемма B.5. *Пусть* $(\mathcal{G}_t)$ *— некоторая фильтрация и* U *,* V *—* $(\mathcal{G}_t)$*-моменты остановки. Пусть* P *— вероятностная мера на* $\mathcal{G}_V$ *. Предположим, что* $U \leqslant V$ P*-п.н. Тогда существует единственная вероятностная мера* Q *на* $\mathcal{G}_U$ *такая, что* $\mathsf{Q}|(\mathcal{G}_U \cap \mathcal{G}_V) = \mathsf{P}|(\mathcal{G}_U \cap \mathcal{G}_V)$*. Эту меру будем обозначать* $\mathsf{P}|\mathcal{G}_U$ *.*

Доказательство. *Существование.* Для любого $A \in \mathcal{G}_U$ множество $A \cap \{U \leqslant V\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{G}_V$. Поэтому мера Q, заданная равенством

$$\mathsf{Q}(A) := \mathsf{P}(A \cap \{U \leqslant V\}), \quad A \in \mathcal{G}_U$$

является корректно определенной вероятностной мерой на $\mathcal{G}_U$. очевидно, для любого $A \in \mathcal{G}_U \cap \mathcal{G}_V$ имеем $\mathsf{Q}(A) = \mathsf{P}(A)$.

Единственность. Пусть Q' — другая мера с указанным свойством. Поскольку $\{U > V\} \in \mathcal{G}_U \cap \mathcal{G}_V$, можем написать

$$\mathsf{Q}'(U > V) = \mathsf{P}(U > V) = 0.$$

Следовательно, для любого $A \in \mathcal{G}_U$ имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}'(A) &= \mathsf{Q}'(A \cap \{U \leqslant V\}) + \mathsf{Q}'(A \cap \{U > V\}) \\ &= \mathsf{Q}'(A \cap \{U \leqslant V\}) = \mathsf{P}(A \cap (U \leqslant V\}) = \mathsf{Q}(A).\end{aligned}$$

Это завершает доказательство. □

Лемма B.6. *Пусть* $(\mathcal{F}_t)$ *— каноническая фильтрация на* $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$*. Пусть* S *—* $(\mathcal{F}_t)$*-момент остановки и* P*,* P' *— вероятностные меры на* $\mathcal{F}_S$ *такие, что* $\mathsf{P}(\xi(X) \leqslant S) = 0$*,* $\mathsf{P}'(\xi(X) \leqslant S) = 0$*. Предположим, что существует последовательность* (S_n) *моментов остановки такая, что*

(a) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ $\mathsf{P}(S_n \leqslant S_{n+1} \leqslant S) = 1$ *и* $\mathsf{P}'(S_n \leqslant S_{n+1} \leqslant S) = 1$;

(b) $\lim_n S_n = S$ P, P'*-п.н.*;

(c) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ $\mathsf{P}'|\mathcal{F}_{S_n} = \mathsf{P}|\mathcal{F}_{S_n}$ (*мы используем соглашение из леммы* В.5).

Тогда $\mathsf{P}' = \mathsf{P}$.

Доказательство. Обозначим через $\overline{\mathcal{F}}_{S_n}$ пополнение $\mathcal{F}_{S_n}$ по мере $\mathsf{P}+\mathsf{P}'$, т.е. $\overline{\mathcal{F}}_{S_n}$ порождается σ-алгеброй $\mathcal{F}_{S_n}$ и всеми множествами $(\mathsf{P}+\mathsf{P}')$-меры нуль из $\mathcal{F}$. Очевидно, $\mathsf{P}'|\overline{\mathcal{F}}_{S_n} = \mathsf{P}|\overline{\mathcal{F}}_{S_n}$. Положим $\mathcal{G} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathcal{F}}_{S_n}$. По лемме о монотонных классах, $\mathsf{P}'|\mathcal{G} = \mathsf{P}|\mathcal{G}$.

Возьмем $A \in \mathcal{F}_S$. Из предложения В.2 вытекает, что $A = \{X^S \in A\}$. Следовательно, $\mathcal{F}_S \subseteq \sigma(X_t^S;\, t \geqslant 0)$. Для любого $t \geqslant 0$ имеем

$$X_t^S = \lim_{n\to\infty} X_t^{S_n} \quad \mathsf{P}, \mathsf{P}'\text{-п.н.}$$

По лемме В.1, каждая из случайных величин $X_t^{S_n}$ является $\mathcal{F}_{S_n}$-измеримой. Следовательно, X_t^S $\mathcal{G}$-измерима. В результате, $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{G}$, и следовательно, $\mathsf{P}' = \mathsf{P}$. □

Для произвольного момента остановки S на $C(\mathbb{R}_+)$ рассмотрим *оператор сдвига* $\Theta_S : C(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$, определенный по формуле

$$(\Theta_S\omega)(t) = \begin{cases} \omega(S(\omega)+t), & \text{если } S(\omega) < \infty, \\ 0, & \text{если } S(\omega) = \infty. \end{cases} \tag{B.2}$$

Лемма В.7. *Пусть* P *— глобальное решение* (2) *и* $d \in \mathbb{R}$. *Предположим, что* $\mathsf{P}(T_d < \infty) > 0$. *Положим* $\mathsf{Q} = \mathsf{P}(\,\cdot \mid T_d < \infty)$, $\mathsf{R} = \mathsf{Q} \circ \Theta_{T_d}^{-1}$. *Тогда* R *является глобальным решением* (2) *с* $X_0 = d$.

Доказательство. Условия (a), (b) определения 1.7, очевидно, выполнены. Проверим (c). Фиксируем $\lambda > 0$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} M_t &= X_t - d - \int_0^t b(X_s)ds, \quad t \geqslant 0, \\ U &= \inf\{t \geqslant 0 : |M_s| \geqslant \lambda\}, \\ V &= \inf\{t \geqslant T_d : |M_t - M_{T_d}| \geqslant \lambda\}, \\ N_t &= \int_0^t I(T_d \leqslant s < V)dM_s, \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Процесс N является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом. Будучи ограниченным, он является равномерно интегрируемым $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-мартингалом. Следовательно, для любых $s \leqslant t$, $C \in \mathcal{F}_S$ имеем

$$\mathsf{E}_\mathsf{R}[(M_t^U - M_s^U)I(C)] = \mathsf{E}_\mathsf{P}\big[\big(N_{t+T_d} - N_{s+T_d}\big)I(\Theta_{T_d}^{-1}(C))I(T_d < \infty)\big] = 0.$$

(Здесь мы воспользовались теоремой об остановке и тем фактом, что $\Theta_{T_d}^{-1}(C) \in \mathcal{F}_{s+T_d}$; см. предложение B.2.) Итак, $M^U \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \mathsf{R})$. Поскольку λ было выбрано произвольно, это означает, что $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \mathsf{R})$. Условие (d) проверяется аналогично. □

§ B.3 Прочие леммы

Определение B.8. *Функцией склеивания* называется отображение $G : C(\mathbb{R}_+) \times C_0(\mathbb{R}_+) \times [0, \infty] \to C(\mathbb{R}_+)$, определенное по формуле

$$G(\omega_1, \omega_2, u)(t) = \omega_1(t \wedge u) + \omega_2((t-u)^+), \quad t \geqslant 0.$$

Здесь $C_0(\mathbb{R}_+) = \{\omega \in C(\mathbb{R}_+) : \omega(0) = 0\}$. Заметим, что отображение G непрерывно и, следовательно, измеримо.

Лемма B.9. *Пусть* $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ *— непрерывный процесс на* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$, $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0}$ *— непрерывный процесс на* $(\Omega', \mathcal{G}', \mathsf{P}')$ *с* $Y_0 = 0$ *и* S *—* $(\mathcal{F}_t^X)$*-момент остановки. Пусть* $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t^X, \mathsf{P})$, $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t^Y, \mathsf{P}')$, *причем* $N_0 = 0$. *Положим*

$$Z(\omega, \omega') = G(X(\omega), Y(\omega'), S(\omega)),$$
$$K(\omega, \omega') = G(M(\omega), N(\omega'), S(\omega)).$$

Тогда $K \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t^Z, \mathsf{P} \times \mathsf{P}')$ *и*

$$\langle K \rangle = G(\langle M \rangle, \langle N \rangle, S). \tag{B.3}$$

`Доказательство`. Очевидно, достаточно проверить это утверждение лишь для случая, когда $\Omega = C(\mathbb{R}_+)$, $\Omega' = C_0(\mathbb{R}_+)$ и X, Y — каноические процессы. Предположим сначала, что M и N ограничены. Фиксируем $s < t$ и $A \in \mathcal{F}_s$, где $(\mathcal{F}_t)$ обозначает каноническую фильтрацию на $C(\mathbb{R}_+)$. Согласно тесту Гальмарино, $S(X) = S(Z)$. Можем написать

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_{\mathsf{P}\times\mathsf{Q}}\big[(K_t - K_s)I(S > s)I(Z \in A)\big] \\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{P}\times\mathsf{Q}}\big[(K_t - K_s)I(S > s)I(X \in A)\big] \\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{P}\times\mathsf{Q}}\big[(M_{t\wedge S} - M_s)I(S > s)I(X \in A)\big] \\
&\quad + \mathsf{E}_{\mathsf{P}\times\mathsf{Q}}\big[(N_{(t-S)^+})I(S > s)I(X \in A)\big] \\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\big[(M_{s\vee(t\wedge S)} - M_s)I(S > s)I(X \in A)\big] \\
&\quad + \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\big[I(S > s)I(X \in A)\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[N_{(t-S(X))^+}]\big] = 0.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Для $\omega \in C(\mathbb{R}_+)$ такого, что $S(\omega) \leqslant s$, положим

$$A_\omega = \{\omega' \in C_0(\mathbb{R}_+) : G(\omega, \omega', S(\omega)) \in A\}.$$

Тогда $A_\omega \in \mathcal{F}^Y_{s-S(\omega)}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_{\mathsf{P}\times\mathsf{Q}}\big[(K_t - K_s)I(S \leqslant s)I(Z \in A)\big] \\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\big[I(S \leqslant s)\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[I(Y \in A_X)(N_{t-S(X)} - N_{s-S(X)})]\big] = 0.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Из равенств (B.4) и (B.5) вытекает, что $K \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}^Z_t, \mathsf{P}\times\mathsf{Q})$. Аналогичные рассуждения показывают, что процессы

$$M^2_{t\wedge S} - \langle M\rangle_{t\wedge S}, \quad N^2_{(t-S)^+} - \langle N\rangle_{(t-S)^+}, \quad M_{t\wedge S}N_{(t-S)^+}, \quad t \geqslant 0$$

принадлежат $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}^Z_t, \mathsf{P}\times\mathsf{Q})$. Следовательно, процесс

$$\begin{aligned}
&K^2_t - \langle M\rangle_{t\wedge S} - \langle N\rangle_{(t-S)^+} \\
&= M^2_{t\wedge S} - \langle M\rangle_{t\wedge S} + N^2_{(t-S)^+} - \langle N\rangle_{(t-S)^+} + 2M_{t\wedge S}N_{(t-S)^+}, \quad t \geqslant 0
\end{aligned}$$

является $(\mathcal{F}^Z_t, \mathsf{P}\times\mathsf{Q})$-локальным мартингалом. Это доказывает (B.3).

Для неограниченных M и N определим

$$K^{(l)} = G\big(M^{T_{l,-l}(M)}, N^{T_{l,-l}(N)}, S\big),$$

где $l \in \mathbb{N}$. Легко проверить, что

$$\inf\{t \geqslant 0 : |K_t| \geqslant l\} = \inf\{t \geqslant 0 : |K_t^{(2l)}| \geqslant l\}.$$

Теперь требуемое утверждение для неограниченных M и N вытекает из уже доказанного утверждения для ограниченных M и N. □

Определение B.10. Последовательность процессов $Z^{(n)} = (Z_t^{(n)};\, t \geqslant 0)$, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{Q})$, сходится к процессу $Z = (Z_t;\, t \geqslant 0)$ *по вероятности равномерно на компактных интервалах*, если для любого $t \geqslant 0$

$$\sup_{s \leqslant t} |Z_s^{(n)} - Z_s| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{Q}} 0.$$

Будем использовать обозначение:

$$Z^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{Q}\text{-u.p.}} Z.$$

Лемма B.11. *Пусть* $\big(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q}\big)$ *— фильтрованное вероятностное пространство. Предположим, что* $M^{(n)} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G}_t, \mathsf{Q})$ *и*

$$M^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{Q}\text{-u.p.}} M.$$

Тогда $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G}_t, \mathsf{Q})$ *и*

$$\langle M^{(n)} \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{Q}\text{-u.p.}} \langle M \rangle.$$

`Доказательство`. Фиксируем $u \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$. Найдем $\lambda > 0$ такое, что

$$\mathsf{Q}\Big(\sup_{t \leqslant u} |M_t| \leqslant \lambda\Big) > 1 - \varepsilon$$

и рассмотрим

$$\tau = u \wedge \inf\{t \geqslant 0 : |M_t| \geqslant \lambda\},$$

$$\tau_n = \tau \wedge \inf\{t \geqslant 0 : |M_t^{(n)}| \geqslant 2\lambda\}.$$

Тогда

$$\sup_{t \leqslant u} |M_{t\wedge\tau_n} - M_{t\wedge\tau}| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{Q}} 0.$$

Для любых $t \leqslant u$, $n \in \mathbb{N}$ имеем $|M^{(n)}_{t\wedge\tau_n}| \leqslant 2\lambda$. Поэтому для любых $s \leqslant t \leqslant u$ и $C \in \mathcal{G}_s$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}[(M_{t\wedge\tau} - M_{s\wedge\tau})I(C)] = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[\big(M^{(n)}_{t\wedge\tau_n} - M^{(n)}_{s\wedge\tau_n}\big)I(C)\big] = 0.$$

Поскольку u и ε были выбраны произвольно, получаем включение $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G}_t, \mathsf{Q})$.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим

$$\begin{aligned} N^{(n)} &= M^{(n)} - M, \\ \tau^n_m &= \inf\{t \geqslant 0 : |N^{(n)}_t| \geqslant m\}, \\ N^{(nm)}_t &= N^{(n)}_{t\wedge\tau^n_m}, \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$N^{(nm)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{Q}\text{-u.p.}} 0, \quad \tau^n_m \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{Q}} \infty. \tag{B.6}$$

Применяя неравенство Буркхольдера–Дэвиса–Ганди (см. [63; Ch. IV, § 4]), заключаем, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\langle N^{(nm)} \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{Q}\text{-u.p.}} 0.$$

Учитывая (B.6), получаем

$$\langle N^{(n)} \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{Q}\text{-u.p.}} 0.$$

Используя неравенство $|\langle N^{(n)}, M\rangle| \leqslant \langle N^{(n)}\rangle^{1/2}\langle M\rangle^{1/2}$, приходим к

$$\langle N^{(n)}, M \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{Q}\text{-u.p.}} 0.$$

Теперь для доказательства требуемого утверждения достаточно воспользоваться равенством $\langle M^{(n)}\rangle = \langle M\rangle + 2\langle N^{(n)}, M\rangle + \langle N^{(n)}\rangle$. □

Список литературы

[1] *С.Н. Бернштейн.* Принципы теории стохастических дифференциальных уравнений.// Труды Физ.-Мат. Института им. В.А. Стеклова, **5** (1934), с. 95–124.

[2] *А. Бородин, П. Салминен.* Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. Санкт-Петербург, Лань, 2000.

[3] *А.В. Булинский, А.Н. Ширяев.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003.

[4] *С. Ватанабэ, Н. Икеда.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.

[5] *А.Д. Вентцель.* Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1991.

[6] *В.А. Волконский.* Случайные замены времени для строго марковских процессов.// Теория вероятностей и ее применения, **3** (1958), с. 310–326.

[7] *В.А. Волконский.* Аддитивные функционалы марковских процессов.// Труды Московского Математического Общества, **9** (1960), с. 143–189.

[8] *И.В. Гирсанов.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры.// Теория вероятностей и ее применения, **5** (1960), вып. 3, с. 314–330.

[9] *И.В. Гирсанов.* Пример неединственности решения стохастического уравнения К. Ито.// Теория вероятностей и ее применения, **7** (1962), вып. 3, с. 336–342.

[10] *И.И. Гихман.* Об одном методе построения случайных процессов.// Доклады Академии Наук СССР, **58** (1947), с. 961–964.

[11] *И.И. Гихман.* О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями.// Украинский математический журнал, **2** (1950), вып. 3, с. 45–69.

[12] *И.И. Гихман.* К теории дифференциальных уравнений случайных процессов, I, II.// Украинский математический журнал, **2** (1950), вып. 4, с. 37–63; **3** (1951), вып. 3, с. 317–339.

[13] *И.И. Гихман, А.В. Скороход.* Теория случайных процессов, т. III. М.: Наука, 1975.

[14] *И.И. Гихман, А.В. Скороход.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1982.

[15] *Дж. Дуб.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.

[16] *Е.Б. Дынкин.* Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.

[17] *Ж. Жакод, А.Н. Ширяев.* Предельные теоремы для случайных процессов. М.: Физматлит, 1994.

[18] *А.К. Звонкин.* Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, ”уничтожающее” снос.// Математический сборник, **93** (1974), вып. 1, с. 129–149.

[19] *А.К. Звонкин, Н.В. Крылов.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений.// В кн.: Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974), Вильнюс, 1975, ч. 2, с. 9–88.

[20] *К. Ито, Г. Маккин.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968.

[21] *А.Н. Колмогоров.* Об аналитических методах в теории вероятностей.// Успехи математических наук, **5** (1938), с. 5–41.

[22] *Н.В. Крылов.* О квазидиффузионных процессах.// Теория вероятностей и ее применения, **11** (1966), вып. 3, с. 424–443.

[23] *Н.В. Крылов.* О стохастических интегральных уравнениях Ито.// Теория вероятностей и ее применения, **14** (1969), вып. 2, с. 340–348.

[24] *Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

[25] *Г. Маккин.* Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972.

[26] *Б. Оксендал.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003.

[27] *Н.И. Портенко.* О существовании решений стохастических дифференциальных уравнений с интегрируемым коэффициентом переноса.// Теория вероятностей и ее применения, **19** (1974), вып. 3, с. 552–557.

[28] *Н.И. Портенко.* К теории стохастических дифференциальных уравнений.// Теория случайных процессов, **4** (1976), с. 72–80.

[29] *А.В. Скороход.* Исследования по теории случайных процессов. Киев, издательство Киевского университета, 1961.

[30] *Р.З. Хасьминский.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. М.: Наука, 1969.

[31] *Б. Цирельсон.* Пример стохастического дифференциального уравнения без сильного решения.// Теория вероятностей и ее применения, **20** (1975), вып. 2, с. 427–430.

[32] *А.Н. Ширяев.* Статистический последовательный анализ. 2е изд. М.: Наука, 1976.

[33] *А.Н. Ширяев.* Основы стохастической финансовой математики. 2е изд. М.: Фазис, 2004.

[34] *А.Н. Ширяев.* Вероятность. 3е изд. М.: МЦНМО, 2004.

[35] *S. Albeverio, Y.G. Kondratiev, M. Röckner.* Strong Feller properties for distroted Brownian motion and applications to finite particle systems with singular interactions.// In: H.H. Kuo et al (Eds.). Finite and Infinite Dimensional Analysis in Honor of Leonard Gross. Contemporary Mathematics, **317**, American Mathematical Society, 2003.

[36] *S. Assing, W. Schmidt.* Continuous strong Markov processes in dimension one.// Lecture Notes in Mathematics, **1688**. Springer, 1998.

[37] *S. Assing, T. Senf.* On stochastic differential equations without drift.// Stochastics and Stochastics Reports, **36** (1991), No. 1, p. 21–39.

[38] *M.T. Barlow.* One-dimensional stochastic differential equations with no strong solution.// Journal of the London Mathematical Society, **26** (1982), p. 335–347.

[39] *S.N. Bernstein.* Équations différentielles stochastiques.// Act. Sci. Ind., **738** (1938), p. 5–31.

[40] *E. Çinlar, J. Jacod, P. Protter, M.J. Sharpe.* Semimartingales and Markov processes.// Probability Theory and Related Fields, **54** (1980), p. 161–219.

[41] *M. Csörgö, L. Horwáth, Q.-M. Shao.* Convergence of integrals of uniform empirical and quantile processes.// Stochastic Processes and Their Applications, **45** (1993), No. 2, p. 283–294.

[42] *H.-J. Engelbert.* On the theorem of T. Yamada and S. Watanabe.// Stochastics and Stochastics Reports, **36** (1991), p. 205–216.

[43] *H.-J. Engelbert.* Existence and non-existence of solutions of one-dimensional stochastic equations.// Probability and Mathematical Statistics, **20**, (2000), p. 343–358.

[44] *H.-J. Engelbert, W. Schmidt.* On the behaviour of certain functionals of the Wiener process and applications to stochastic differential equations.// In: Stochastic Differential Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, **36** p. 47–55. Springer, 1981.

[45] *H.-J. Engelbert, W. Schmidt.* On one-dimensional stochastic differential equations with generalized drift.// In: Stochastic Differential Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, **69**, p. 143–155. Springer, 1985.

[46] *H.-J. Engelbert, W. Schmidt.* On solutions of one-dimensional stochastic differential equations without drift.// Probability Theory and Related Fields, **68** (1985), p. 287–314.

[47] *H.-J. Engelbert, W. Schmidt.* Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations, I, II, III.// Math. Nachr., **143** (1989), p. 167–184; **144** (1989), p. 241–281; **151** (1991), p. 149–197.

[48] *S.N. Ethier, T.G. Kurtz.* Markov processes: characterization and convergence. Wiley, 1986.

[49] *W. Feller.* The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations.// Ann. Math., **55** (1952), p. 468–519.

[50] *W. Feller.* Diffusion processes in one dimension.// Trans. Amer. Math. Soc., **77** (1954), p. 1–31.

[51] *G.A. Hunt.* Markoff processes and potentials, I, II.// Illinois Journal of Mathematics, **1** (1957), p. 44–93; **2** (1958), p. 151–213.

[52] *K. Itô.* Stochastic integrals.// Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20** (1944), p. 519–524.

[53] *K. Itô.* On a stochastic integral equation.// Proc. Imp. Acad. Tokyo, **22** (1946), p. 32–35.

[54] *K. Itô.* On stochastic differential equations.// Memoirs of the American Mathematical Society, **4** (1951), p. 1–51.

[55] *J. Jacod.* Calcul stochastique et problemes de martingales. Lecture Notes in Mathematics, **714** (1979).

[56] *O. Kallenberg.* Foundations of modern probability. 2nd Ed. Springer, 2002.

[57] *I. Karatzas, S.E. Shreve.* Brownian motion and stochastic calculus. 2nd Ed. Springer, 1991.

[58] *A.N. Kolmogoroff.* Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.// Math. Annalen, **104** (1931), p. 415–458.

[59] *N.V. Krylov, M. Röckner.* Strong solutions of stochastic equations with singular time dependent drift.// Probability Theory and Related Fields, **131** (2005), No. 2, p. 154–196.

[60] *P. Langevin.* Sur la théorie du mouvement brownien.// C.R. Acad. Sci. Paris, **146** (1908), p. 530–533.

[61] *N.S. Nadirashvili.* Nonuniqueness in the martingale problem and the Dirichlet problem for uniformly elliptic operators.// Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **24** (1997), p. 537–550.

[62] *J.W. Pitman, M. Yor.* Some divergent integrals of Brownian motion.// In: Analytic and Geometric Stochastics (ed. D. Kendall). Supplement to Adv. Appl. Probab., **18** (1986), p. 109–116.

[63] *D. Revuz, M. Yor.* Continuous martingales and Brownian motion. 3rd Ed. Springer, 1999.

[64] *L.C.G. Rogers, D. Williams.* Diffusions, Markov processes, and martingales. 2nd Ed. Cambridge University Press, 2000.

[65] *M.V. Safonov.* Nonuniqueness for second-order elliptic equations with measurable coefficients.// Siam. J. Math. Anal., **30** (1999), No. 4, p. 879–895.

[66] *W. Schmidt.* On semimartingale diffusions and stochastic differential equations.// Stochastics and Stochastic Reports, **29** (1990), p. 407–424.

[67] *D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan.* Diffusion processes with continuous coefficients, I, II.// Communications in Pure and Applied Mathematics, **22** (1969), p. 345–400; p. 479–530.

[68] *D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan.* Multidimensional diffusion processes. Springer, 1979.

[69] *T. Yamada.* Principal values of Brownian local times and their related topics.// In: Itô's stochastic calculus and probability theory, Springer, 1996, p. 413–422.

[70] *T. Yamada, S. Watanabe.* On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations.// J. Math. Kyoto Univ, **11** (1971), p. 155–167.

Работы автора по теме диссертации

[71] *А.С. Черный.* Векторный стохастический интеграл в первой фундаментальной теореме теории арбитража.// Успехи математических наук, **53** (1998), №. 4, с. 221–222.

[72] *А.С. Черный, А.Н. Ширяев.* Некоторые свойства броуновского движения со сносом и обобщение одной теоремы П. Леви.// Теория вероятностей и ее применения, **44** (1999), №. 2, с. 466–472.

[73] *А.С. Черный.* Сходимость некоторых интегралов, связанных с процессами Бесселя.// Теория вероятностей и ее применения, **45** (2000), №. 2, с. 251–267.

[74] *А.С. Черный.* Качественное поведение решений стохастических дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами.// Успехи математических наук, **55** (2000), №. 3, с. 193–194.

[75] *А.С. Черный.* О сильной и слабой единственности для стохастических дифференциальных уравнений.// Теория вероятностей и ее применения, **46** (2001), №. 3, с. 483–497.

[76] *А.С. Черный.* Семейства согласованных вероятностных мер.// Теория вероятностей и ее применения, **46** (2001), №. 1, с. 160–163.

[77] *А.Н. Ширяев, А.С. Черный.* Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража.// Труды МИРАН им. В.А. Стеклова, **237** (2002), с. 12–56.

[78] *А.С. Черный, М.А. Урусов.* Разделяющие моменты для мер на пространствах с фильтрацией.// Теория вероятностей и ее применения, **48** (2003), №. 2, с. 416–427.

[79] *A.S. Cherny.* On the strong and weak solutions of stochastic differential equations governing Bessel processes.// Stochastics and Stochastics Reports, **70** (2000), No. 3, p. 213–219.

[80] *A.S. Cherny.* Principal values of the integral functionals of Brownian motion: existence, continuity and an extension of Ito's formula.// Lecture Notes in Mathematics, **1755** (2001), p. 348–370.

[81] *A.S. Cherny, A.N. Shiryaev.* On criteria for the uniform integrability of Brownian stochastic exponentials.// In: Optimal Control and Partial Differential Equations. In honor of Alain Bensoussan's 60th birthday. IOS Press, 2001, p. 80–92.

[82] *A.S. Cherny, A.N. Shiryaev, M. Yor.* Limit behaviour of the "horizontal-vertical" random walk and some extensions of the Donsker-Prokhorov invariance principle.// Теория вероятностей и ее применения, **47** (2002), №. 3, с. 498–516.

[83] *A.S. Cherny, H.-J. Engelbert.* Isolated singular points of stochastic differential equations.// In: R. Buckdahn, H.-J. Engelbert, M. Yor (Eds.). Stochastic processes and related topics. Taylor & Francis, 2002, p. 55–80.

[84] *A.S. Cherny.* Invariant distributions for singular stochastic differential equations.// Stochastics and Stochastics Reports, **76** (2004), No. 2, p. 101–112.

[85] *A.S. Cherny, A.N. Shiryaev.* On stochastic integrals up to infinity and predictable criteria for integrability.// Lecture Notes in Mathematics, **1857** (2004), p. 165–185.

[86] *A.S. Cherny, H.-J. Engelbert.* Singular stochastic differential equations. Lecture Notes in Mathematics, **1858** (2004), 128 p. (Монография).

Указатель обозначений

$C(\mathbb{R}_+)$	пространство непрерывных функций $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$C_0(\mathbb{R}_+)$	пространство непрерывных функций $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, обнуляющихся в нуле
$\overline{C}(\mathbb{R}_+)$	пространство непрерывных функций $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \cup \{\pi\}$, уничтожаемых в некоторый момент, 47
$C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$	пространство непрерывных функций $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$
$\mathcal{F}_t^+$	$\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$, правая модификация фильтрации $(\mathcal{F}_t)$
$\mathcal{F}_t^X$	$\sigma(X_s;\ s \leqslant t)$, натуральная фильтрация процесса X
$\overline{\mathcal{F}}_t^X$	пополненная натуральная фильтрация процесса X, 44
$\mathcal{F}_S$	набор множеств $A \in \mathcal{F}$ таких, что для любого $t \geqslant 0$ выполнено $A \cap \{S \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$
$\mathcal{F}_{S-}$	σ-алгебра, порожденная множествами $A \cap \{S > t\}$, где $t \geqslant 0$ и $A \in \mathcal{F}_t$
$\mathcal{F}\vert_A$	$\{B \cap A : B \in \mathcal{F}\}$, сужение σ-алгебры $\mathcal{F}$ на множество $A \in \mathcal{F}$
$\mathring{I}$	внутренность интервала I
$\overline{I}$	замыкание интервала I

$L^1_{\mathrm{loc}}(d)$	множество функций, локально интегрируемых в точке d, 83
$L^1_{\mathrm{loc}}(D)$	множество функций, локально интегрируемых на множестве D, 84
$L^a_t(X)$	локальное время процесса X, проведенное в точке a до момента t, 188
$L^{a-}_t(X)$	$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} L^{a-\varepsilon}_t(X)$
$\mathrm{Law}(X_t;\, t \geqslant 0)$	распределение процесса X
$\mathrm{Law}(X_t;\, t \geqslant 0 \vert \mathsf{Q})$	распределение процесса X относительно меры Q
$\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}_t, \mathsf{Q})$	пространство $(\mathcal{F}_t, \mathsf{Q})$-локальных мартингалов
$\mathsf{P}\vert\mathcal{G}$	сужение меры P на σ-алгебру $\mathcal{G}$
$\mathsf{P}\circ\varphi^{-1}$	образ меры P при отображении φ
$\mathbb{R}_+$	$[0,\infty)$, положительная полупрямая
$[\![S,T]\!]$	$\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ : S(\omega)\leqslant t\leqslant T(\omega)\}$
$]\!]S,T]\!]$	$\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ : S(\omega)< t\leqslant T(\omega)\}$
$[\![S,T[\![$	$\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ : S(\omega)\leqslant t< T(\omega)\}$
$]\!]S,T[\![$	$\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ : S(\omega)< t< T(\omega)\}$
$T_a(X)$	$\inf\{t\geqslant 0 : X_t = a\}$
$T_{a,b}(X)$	$T_a(X)\wedge T_b(X)$
T_a	$\inf\{t\geqslant 0 : X_t = a\}$, где X — канонический процесс на $C(\mathbb{R}_+)$ или $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$
$T_{a,b}$	$T_a\wedge T_b$

$\overline{T}_a$	$\sup_n \inf\{t \geqslant 0 : \lvert X_t - a\rvert \leqslant 1/n\}$, где X — канонический процесс на $C(\mathbb{R}_+)$ или $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$
$\overline{T}_{a,b}$	$\overline{T}_a \wedge \overline{T}_b$
$\overline{T}_\infty$	$\lim_{n\to\infty} T_n$
$\overline{T}_{a,\infty}$	$\overline{T}_a \wedge \overline{T}_\infty$
T_{0+}	$\inf\{t \geqslant 0 : X_t > 0\}$, где X — канонический процесс на $C(\mathbb{R}_+)$ или $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$
T_{0-}	$\inf\{t \geqslant 0 : X_t < 0\}$, где X — канонический процесс на $C(\mathbb{R}_+)$ или $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$
$\operatorname{Var} X$	процесс вариации процесса X: $(\operatorname{Var} X)_t$ — полная вариация X на $[0, t]$
x^+	$x \vee 0$
x^-	$x \wedge 0$
$x \vee y$	$\max\{x, y\}$
$x \wedge y$	$\min\{x, y\}$
$x_n \downarrow 0$	$x_n \to 0$ и $x_n > 0$
$x_n \uparrow 0$	$x_n \to 0$ и $x_n < 0$
$\langle X\rangle$	квадратическая вариация непрерывного семимартингала X
$\langle X, Y\rangle$	квадратическая ковариация непрерывных семимартингалов X и Y
X_{S-}	$\lim_{t\uparrow S} X_t$, левый предел процесса X в момент S
X^S	процесс X, остановленный в момент S: $X^S_t = X_{t\wedge S}$

$\mathcal{B}(E)$	борелевская σ-алгебра пространства E
$\xi(f)$	$\inf\{t \geqslant 0 : f(t) = \pi\}$, 47
σ^*	транспонированная матрица σ
φ^{-1}	обратная к функции φ
$\\|\cdot\\|$	евклидова норма на $\mathbb{R}^n$
$\xrightarrow{\text{u.p.}}$	сходимость процессов по вероятности на компактных интервалах, 206
$\xrightarrow{\text{Var}}$	сходимость по вариации вероятностных мер

Предметный указатель