КАЧЕСТВЕННОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.С. Черный

В настоящей статье рассматриваются одномерные однородные стохастические дифференциальные уравнения вида

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t, \quad X_0 = x. \tag{1}$$

Коэффициенты b и σ являются измеримыми функциями; никаких условий типа ограниченности или отделенности от нуля не предполагается. Единственное условие, налагаемое с самого начала, состоит в том, что $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sigma(x) \neq 0$. Решение уравнения (1) будет пониматься в слабом смысле.

В статье [1] доказано, что если функция $(1+|b|)/\sigma^2$ локально интегрируема на $\mathbb{R}$, то для любого x существует единственное решение уравнения (1). Цель настоящей статьи состоит в исследовании поведения решения вблизи тех точек, где функция $(1+|b|)/\sigma^2$ не локально интегрируема.

Определение 1. (a) Точка d называется *особой* для уравнения (1), если функция $(1+|b|)/\sigma^2$ не локально интегрируема в этой точке.

(b) Точка d называется *изолированной особой точкой* для уравнения (1), если d — особая точка и существует проколотая окрестность d, состоящая из неособых точек.

Определение 2. (a) Пусть T — момент остановки на $(\mathcal{F}_t)$, где $(\mathcal{F}_t)$ обозначает каноническую фильтрацию на пространстве $C(\mathbb{R}_+)$. *Решением уравнения* (1) *до момента* T называется мера P на $\mathcal{F}_T$ такая, что

i) $\mathsf{P}\{X_0 = x\} = 1$ (здесь X — координатный процесс на $C(\mathbb{R}_+)$);

ii) $\int_0^T (1+|b(X_s)| + \sigma^2(X_s))\,ds < \infty$ P-п.н.;

iii) процесс $M_t = X_t - \int_0^{t\wedge T} b(X_s)\,ds$ является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом с квадратической ковариацией $\langle M\rangle_t = \int_0^{t\wedge T} \sigma^2(X_s)\,ds$.

(b) Пусть T — предсказуемый момент с предвещающей последовательностью $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ (по поводу терминологии см. [3; гл.I]). *Решением* (1) *до* $T-$ называется мера P на $\mathcal{F}_{T-}$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{P}|\mathcal{F}_{T_n}$ — решение (1) до T_n.

Пусть I — некоторый интервал и $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ — непрерывный строго марковский процесс. Поведение этого процесса в правой полуокрестности выделенной точки $d \in I$ может быть охарактеризовано следующими параметрами:

$$e_1 = \lim_{b\downarrow d} \mathsf{P}_d\{T_b < \theta\}, \qquad e_2 = \lim_{c\downarrow d}\lim_{b\downarrow d} \mathsf{P}_b\{T_c < \theta\}, \qquad e_3 = \lim_{b\downarrow d} \mathsf{P}_b\{T_d < \theta\},$$

где $\theta > 0$ — некоторая константа. В [2; §3.3] доказано, что значения параметров $e_1 - e_3$ не зависят от выбора θ. К примеру, значение $e_3 = 0$ показывает, что процесс не может достичь точку d справа.

Предположим, что ноль — изолированная особая точка уравнения (1). Будем исследовать поведение решения в правой полуокрестности нуля. Установлено, что существует 8 различных типов поведения. Сформулируем для примера теорему, относящуюся к тому случаю, когда ноль имеет *правый тип 7*. Теоремы, относящиеся к остальным 7 случаям, схематично представлены на диаграмме. Мы используем следующие обозначения: $T_{0,a} = T_0 \wedge T_a$, $\rho(x) = \exp\{-\int^x \frac{2b}{\sigma^2}\}$, $s(x) = \int^x \rho$ (в случае, когда $\int_0^a \rho < \infty$, выбираем s так, что $s(0) = 0$). Здесь a — такое положительное число, что функция $(1+|b|)/\sigma^2$ локально интегрируема на $(0, a]$ (т.е. локально интегрируема в каждой точке этого полуинтервала).

Теорема. Предположим, что

$$\int_0^a \rho(x)\,dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,|s|\,dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{|s(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx < \infty.$$

Для любого x из интервала $I = (0,a]$ существует единственное решение (1), определенное до момента $T = T_a$. Зададим $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ как образ P_x при отображении $(X_t)_{t\geq 0} \mapsto (X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ (т.е. $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ — мера на σ-алгебре $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$). Тогда $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in I}$ является регулярным непрерывным строго марковским процессом. Определим $\widetilde{\mathsf{P}}_0$ как меру, сосредоточенную на $X \equiv 0$. Тогда $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[0,a]}$ — непрерывный строго марковский процесс, для которого локальные характеристики в нуле имеют следующие значения: $e_1 = 0$, $e_2 = 1$, $e_3 = 0$.

- $\sigma \neq 0$, $\dfrac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{loc}((0,a])$
  - $\int_0^a \rho < \infty$
    - $\int_0^a \frac{1+|b|}{\rho\,\sigma^2} < \infty$
      - $\int_0^a \frac{|b|}{\sigma^2} < \infty$ — 0
      - $\int_0^a \frac{|b|}{\sigma^2} = \infty$ — 2
    - $\int_0^a \frac{1+|b|}{\rho\,\sigma^2} = \infty$
      - $\int_0^a \frac{1+|b|}{\rho\,\sigma^2}\,s < \infty$ — 1
      - $\int_0^a \frac{1+|b|}{\rho\,\sigma^2}\,s = \infty$
        - $\int_0^a \frac{s}{\rho\,\sigma^2} < \infty$ — 6
        - $\int_0^a \frac{s}{\rho\,\sigma^2} = \infty$ — 4
  - $\int_0^a \rho = \infty$
    - $\int_0^a \frac{1+|b|}{\rho\,\sigma^2}\,|s| < \infty$ — 3
    - $\int_0^a \frac{1+|b|}{\rho\,\sigma^2}\,|s| = \infty$
      - $\int_0^a \frac{|s|}{\rho\,\sigma^2} < \infty$ — 7
      - $\int_0^a \frac{|s|}{\rho\,\sigma^2} = \infty$ — 5

Тип	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
I	$[0,a]$	$[0,a]$	$[0,a]$	$[0,a]$	$(0,a)$	$(0,a]$	$(0,a)$	$(0,a]$
T	$T_{0,a}$	$T_{0,a}$	T_a	T_a	T_a-	T_a	$T_{0,a}-$	T_a
e_1	0	0	1	1	0	0	0	0
e_2	0	0	1	1	0	0	0	1
e_3	1	1	1	0	0	0	0	0

Автор благодарит профессора А.Н. Ширяева за полезные обсуждения и ценные рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] H.-J. Engelbert, W. Schmidt. Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations, I, II, III.//Math. Nachr. v. 143 (1989), p. 167–184; v. 144 (1989), p. 241–281; v. 151 (1991), p. 149–197. [2] К. Ито, Г. Маккин. Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968. [3] Ж. Жакод, А.Н. Ширяев. Предельные теоремы для случайных процессов. М.: Физматлит, 1994.