Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

Черный Александр Семенович

КАЧЕСТВЕННОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.05 — теория вероятностей
и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
член-корр. РАН, профессор А.Н. Ширяев

Москва, 2000

Содержание

Введение

1. Основы теории *диффузионных процессов* были заложены в статье А.Н. Колмогорова [11] ("уравнение Колмогорова-Чепмена", прямые и обратные уравнения в частных производных). Дальнейшее развитие эта теория получила в работах В. Феллера (см., например, [25], [26]). В частности, Феллер исследовал *граничное поведение* диффузионного процесса.

В работах [27], [28] К. Ито предложил альтернативный подход для построения диффузии. Им было введено понятие *стохастического дифференциального уравнения*. Примерно в то же самое время и независимо от Ито стохастические дифференциальные уравнения были рассмотрены И.И. Гихманом [3], [4]. Д. Струк и С. Варадан в работе [37] дали определение *мартингальной проблемы*, тесно связанное с понятием стохастического дифференциального уравнения.

К. Ито, Г. Маккин [10] и Е.Б. Дынкин [7] предложили вероятностный подход для построения диффузионного процесса. Ими было доказано, что любой одномерный непрерывный *строго марковский* процесс, удовлетворяющий дополнительному условию *регулярности*, может быть получен из броуновского движения посредством двух операций: *случайной замены времени* и *преобразования фазового пространства*.

Связь между непрерывными строго марковскими процессами, мартингалами/семимартингалами, стохастическими дифференциальными уравнениями и в настоящее время является предметом многочисленных исследований. Х.Ю. Энгельберт и В. Шмидт в [24] доказали, что любой непрерывный строго марковский локальный мартингал может быть получен из решения стохастического дифференциального уравнения без сноса посредством *задержки времени* специального вида. Е. Синлар, Ж. Жакод, Ф. Проттер и М. Шарп сформулировали в [20] необходимые и достаточные условия, при которых функция от регулярного непрерывного строго марковского процесса является семимартингалом. В статье В. Шмидта [35] содержатся необходимые и достаточные условия того, что регулярный непрерывный строго марковский процесс является решением некоторого стохастического дифференциального уравнения. Подобные вопросы для непрерывных строго марковских процессов без предположения регулярности анализируются в [18].

2. В настоящей работе рассматриваются одномерные однородные стохастические дифференциальные уравнения вида

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t, \quad X_0 = x. \tag{1}$$

Мы исследуем следующие основные проблемы:

I. *Существует ли решение уравнения* (1)*?*

II. *Единственно ли решение?*

III. *Обладает ли оно строго марковским свойством?*

Принято различать два типа решений стохастических дифференциальных уравнений: *сильные* и *слабые* решения. Под решением обычно понимается *пара процессов* (X, B) таких, что выполнено равенство (1) (понимаемое в интегральной форме) и B является броуновским движением. Мы будем рассматривать только *слабые* решения. При этом под решением нам будет удобно понимать *меру* P на пространстве $C(\mathbb{R}_+)$, относительно которой процесс

$$B_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma(X_s)}\,dX_s - \int_0^t \frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)}\,ds$$

является $(\mathcal{F}_t)$-броуновским движением (здесь X обозначает канонический процесс, а $(\mathcal{F}_t)$ — каноническую фильтрацию на $C(\mathbb{R}_+)$). Иными словами, мы рассматриваем решение стохастического дифференциального уравнения как решение *мартингальной проблемы.* Точные определения приводятся в параграфе 1.1. Там же описана и взаимосвязь различных определений.

Опишем известные достаточные условия существования и единственности решения стохастических дифференциальных уравнений. Большинство из этих результатов относятся к многомерным неоднородным уравнениям, т.е. уравнениям вида

$$dX_t^i = b^i(t, X_t)\, dt + \sigma^{ij}(t, X_t)\, dB_t^j, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Первое достаточное условие существования и единственности для таких уравнений было получено К. Ито [28]. Это условие состоит в (локальной) ограниченности и липшицевости коэффициентов b и σ.

А.В. Скороходом [17] было доказано существование решения в предположении непрерывности b и σ.

Д. Струк и С. Варадан [37] доказали существование и единственность в случае, когда вектор сноса b ограничен и измерим, а матрица диффузии σ непрерывна, ограничена и строго эллиптична.

Н.В. Крылов [12], [13] доказал существование и единственность в предположении, что снос b ограничен и измерим, а матрица σ ограничена и строго эллиптична (в случае, когда размерность n больше двух, делалось дополнительное предположение для доказательства единственности). При этом матрица σ не предполагалась непрерывной.

Уравнения с неограниченным сносом рассматривались Н.И. Портенко [15], [16]. Им было доказано существование решения в случае, когда σ непрерывна, ограничена и строго эллиптична, а коэффициент сноса b удовлетворяет некоторому предположению интегрируемости.

Условия, налагаемые в работах Скорохода, Струка и Варадана, Крылова, были значительно слабее, чем условия Ито. Возникла некоторая неясность относительно того, как следует понимать решение. А.Н. Ширяевым и М.П. Ершовым были введены понятия *сильного* и *слабого* решения. Соответствующие определения содержатся в книге Р.Ш. Липцера и А.Н. Ширяева [14]. Согласно этой терминологии, решение, построенное Ито, является *сильным* решением, в то время как решения, построенные в более поздних работах (и при более слабых предположениях), являются *слабыми.* Исследованию взаимосвязи между сильными и слабыми решениями посвящена статья А.К. Звонкина и Н.В. Крылова [9].

Во всех вышеупомянутых статьях рассматривался многомерный случай. В работах Ито, Скорохода и Крылова для построения решения был использован метод последовательных приближений. В статье Струка и Варадана последовательные приближения применялись для построения решения при $b = 0$. Для перехода к общему случаю они использовали *замену меры.* Этот метод был впервые предложен И.В. Гирсановым в статье [1]. Отметим также, что во всех упомянутых работах, кроме работы Крылова, рассматривались неоднородные уравнения.

Все описанные выше результаты относились к проблемам I и II. Что касается проблемы III, то в статье Струка и Варадана [37] доказано следующее утверждение (см. также [29; (18.11)]).

Предложение 1. *Если для любого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное решение P_x уравнения* (1), *то $(\mathsf{P}_x)_{x\in\mathbb{R}}$ — строго марковский процесс.*

Подробное изложение теории стохастических дифференциальных уравнений можно найти, например, в книгах [5], [6], [14; гл. 4], [30; ch. 5], [32], [34; ch. IX], [38].

Для *одномерных однородных* стохастических дифференциальных уравнений существуют гораздо более слабые достаточные условия существования и единственности решения, чем перечисленные выше. Это было показано Х.Ю. Энгельбертом и В. Шмидтом в [22]–[24]. Эти статьи содержат необходимые и достаточные условия существования и единственности решения для случая $b = 0$. Имеет место следующее

Предложение 2. *Пусть $b = 0$. Положим*

$$N_\sigma = \{x \in \mathbb{R} : \sigma(x) = 0\},$$
$$E_\sigma = \{x \in \mathbb{R} : \sigma^{-2} \notin L^1_{loc}(x)\}$$

(запись $\sigma^{-2} \notin L^1_{loc}(x)$ означает, что σ не локально интегрируема в точке x).

(i) *Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует решение уравнения* (1) *в том и только в том случае, когда $E_\sigma \subseteq N_\sigma$.*

(ii) *Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное решение уравнения* (1) *в том и только в том случае, когда $E_\sigma = N_\sigma$.*

Для доказательства существования решения Энгельберт и Шмидт применили метод *случайной замены времени.* Суть этого метода поясним на примере того случая, когда $E_\sigma = N_\sigma = \varnothing$. Пусть $(W_t)_{t\geqslant 0}$ — одномерное броуновское движение, выходящее из точки x. Положим

$$A_t = \int_0^t \sigma^{-2}(W_s)\,ds,$$
$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\}.$$

Тогда мера $\mathsf{P} = \mathrm{Law}(W_{\tau_t};\, t \geqslant 0)$ является решением уравнения (1).

Неформально предложение 2 можно интерпретировать следующим образом. Если $\sigma^{-2} \notin L^1_{loc}(x)$, то решение "не может покинуть точку x", т.е. единственно возможным решением, выходящим из x, является мера P такая, что $\mathsf{P}\{\forall t \geqslant 0, X_t = x\} = 1$ (где X — канонический процесс на пространстве $C(\mathbb{R}_+)$). Для того чтобы это действительно было решением, необходимо выполнение равенства $\sigma(x) = 0$. Если же $\sigma^{-2} \in L^1_{loc}(x)$ и $\sigma(x) = 0$, то существует нетривиальное решение, выходящее из точки x, но при этом существует и тривиальное решение: $\mathsf{P}\{\forall t \geqslant 0,\, X_t = x\} = 1$.

Пример неединственности решения, основанный на этом наблюдении, был впервые предложен И.В. Гирсановым [2]. Именно, в этой статье доказано, что для уравнения

$$dX_t = |X_t|^\alpha dB_t, \quad X_0 = 0 \tag{2}$$

при $0 < \alpha < 1/2$ существуют различные решения.

Отметим, что уравнение (2) имеет *немарковские* решения. Идея построения здесь состоит в следующем. Выпустим решение из точки $x \neq 0$. В момент, когда оно впервые попало в нуль, задержим его в нуле на время, зависящее от "прошлого" траектории. По истечении этого времени продолжим решение нетривиальным образом. Построенное таким способом решение не будет марковским.

В статьях [23], [24] Энгельберт и Шмидт приводят достаточное условие существования и единственности при ненулевом сносе. Это условие состоит в том, что $\forall x \in \mathbb{R},\ \sigma(x) \neq 0$ и

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Для доказательства существования и единственности в этом предположении уравнение (1) сводится к уравнению без сноса. При этом используется метод *преобразования фазового пространства.* Этот метод не применим в многомерном или неоднородном случае, но для одномерных однородных уравнений он дает гораздо лучшие результаты, чем *теорема Гирсанова.* Суть этого метода состоит в следующем. Положим

$$\rho(x) = \exp\Big\{-\int^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}\,dy\Big\},$$
$$s(x) = \int^x \rho(y)\,dy.$$

Тогда мера P является решением уравнения (1) в том и только в том случае, когда мера $\mathsf{Q} = \mathrm{Law}\big(s(X_t);\, t \geqslant 0 \,|\, \mathsf{P}\big)$ является решением уравнения

$$dX_t = \varkappa(X_t)\,dB_t, \quad X_0 = s(x), \tag{4}$$

где

$$\varkappa(x) = \rho(s^{-1}(x))\,\sigma(s^{-1}(x)).$$

Предположение (3) гарантирует, что $\varkappa^{-2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Согласно предложению 2, у уравнения (4) существует единственное решение.

Условие (3) является достаточным для существования и единственности решения (1), но не необходимым. Некоторые стохастические дифференциальные уравнения, естественно возникающие в стохастическом анализе, не удовлетворяют этому условию, хотя для них имеют место существование и единственность решения. Рассмотрим, например, уравнение, задающее *квадрат процесса Бесселя размерности* δ:

$$dX_t = \delta\, dt + 2\sqrt{|X_t|}\, dB_t, \quad X_0 = x, \tag{5}$$

где $\delta \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. В этом уравнении коэффициент b липшицев, а коэффициент σ является гельдеровым порядка $1/2$. Поэтому для (5) выполнены даже сильное существование и сильная единственность (см. [31]). Согласно *теореме Ямада–Ватанабе* (см. [40]), для (5) имеют место слабое существование и слабая единственность. Легко проверить, что множество решений (5) совпадает с множеством решений уравнения

$$dX_t = \delta\, dt + \bigl(2\sqrt{|X_t|} + I(X_t = 0)\bigr)\, dB_t, \quad X_0 = x. \tag{6}$$

Следовательно, для (6) также имеют место слабое существование и слабая единственность решения. Кроме того, для этого уравнения коэффициент σ отличен от нуля в каждой точке. Однако условие интегрируемости (3) для (6) нарушается.

Приведем еще один пример уравнения, для которого имеют место существование и единственность решения, в то время как условие (3) нарушается. Рассмотрим уравнение, которому подчиняется *процесс Бесселя размерности* δ:

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2X_t}\, I(X_t \neq 0)\, dt + dB_t, \quad X_0 = x, \tag{7}$$

где $\delta > 1$. В данном случае $\sigma(x) \neq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, а условие интегрируемости (3) не выполнено. В то же время в диссертации (параграф 2.2) доказывается, что при $\delta \geqslant 2$ и $x \neq 0$ уравнение (7) обладает единственным решением. Отметим, что при $1 < \delta < 2$ или $x = 0$ у (7) существуют различные решения.

3. В диссертации исследуются проблемы I–III для случая, когда условие (3) нарушается, т.е. для уравнений с *сингулярными* коэффициентами. На протяжении всей работы предполагаем, что $\forall x \in \mathbb{R},\ \sigma(x) \neq 0$. Мы называем точку d *особой*, если

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \notin L^1_{loc}(d).$$

В параграфе 2.1 приводятся аргументы в пользу того, что такие точки действительно являются "особыми". Доказывается (см. теорему 2.8), что локальное время любого решения уравнения (1) обращается в нуль в любой особой (в смысле данного выше определения) точке. Напротив, если точка d — неособая, то локальное время любого решения строго положительно в этой точке для моментов времени, бо́льших первого момента достижения точки d (см. теорему 2.9). В частности, для решения, выходящего из d, локальное время в этой точке строго положительно при всех $t > 0$. Таким образом, нестрого можно сказать, что особые точки — это те и только те точки, где локальное время решений обращается в нуль.

Другое качественное различие между особыми и неособыми точками описывается теоремой 2.10. Предположим, что нуль — особая точка уравнения (1), а остальные точки являются неособыми. Тогда имеются только следующие 4 возможности:

1. Не существует решения, выходящего из нуля.

2. Существует единственное решение, выходящее из нуля, и оно неотрицательно (т.е. $\mathsf{P}\{\forall t \geqslant 0,\ X_t \geqslant 0\} = 1$).

3. Существует единственное решение, выходящее из нуля, и оно неположительно.

4. Существует как неотрицательное, так и неположительное решение, выходящее из нуля. (В этом случае могут также существовать знакопеременные решения).

Если же все точки вещественной прямой — неособые для (1), то решение, выходящее из нуля, единственно, и оно является знакопеременным. Это вытекает из результатов Энгельберта и Шмидта.

Назовем точку d *изолированной особой точкой*, если d — особая точка и существует проколотая окрестность d, состоящая из неособых точек. Основная цель настоящей работы состоит в качественном исследовании поведения решения вблизи изолированной особой точки.

Прежде всего приведем два примера. Для уравнения

$$dX_t = -\frac{1}{2X_t} I(X_t \neq 0)\, dt + dB_t, \quad X_0 = x \tag{8}$$

нуль является изолированной особой точкой и не существует решения, выходящего из нуля. Это строго доказывается в параграфе 2.2 и неформально может быть объяснено следующим образом. Коэффициент сноса b отрицателен в правой полуокрестности нуля и положителен в левой полуокрестности. Кроме того, снос является очень сильным вблизи нуля. Поэтому он не позволяет решению выйти из этой точки, и единственно возможным остается решение, заданное по формуле $\mathsf{P}\{X \equiv 0\} = 1$. Но, как легко проверить, эта мера не является решением.

Другим примером служит уравнение, которому подчиняется *процесс Бесселя размерности* δ:

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2X_t} I(X_t \neq 0)\, dt + dB_t, \quad X_0 = x. \tag{9}$$

Здесь $\delta > 1$. В параграфе 2.2 доказывается, что для этого уравнения существует как неотрицательное, так и неположительное решение, выходящее из нуля. Неформальное объяснение здесь состоит в следующем. Коэффициент сноса b положителен справа от нуля и является достаточно сильным, чтобы обеспечить существование неотрицательного решения. Аналогично, снос отрицателен слева от нуля, и существует неположительное решение.

Для того чтобы исследовать поведение решения вблизи изолированной особой точки, необходимо отдельно изучить поведение решения в правой и левой полуокрестностях этой точки. Мы предполагаем, что нуль — изолированная особая точка, и исследуем уравнение (1) в правой полуокрестности нуля. Поведение решения в правой полуокрестности нуля зависит от поведения коэффициентов b и σ в этой полуокрестности. Установлено, что существует 8 качественно различных типов поведения. Соответствующие результаты сформулированы в теоремах 3.1–3.8 (так что каждая теорема описывает поведение решения для одного из этих 8 типов). Схематично утверждения этих теорем представлены диаграммой на стр. 57.

Общая схема доказательства каждой из этих теорем состоит в следующем. Сначала устанавливается, что для любого x из правой полуокрестности нуля существует единственное решение, определенное до некоторого случайного момента (например, в теореме 3.1 это момент первого выхода из правой полуокрестности нуля). Нам приходится здесь рассматривать решение до случайного момента, поскольку в данной ситуации нельзя гарантировать существование глобального решения. Определение решения до случайного момента дается в параграфе 2.4. Отметим, что это понятие рассматривалось также в [23], [24], [30; ch. 5, (5.1)]. Для построения решения мы используем методы случайной замены времени и преобразования фазового пространства.

Второй этап в теоремах 3.1–3.8 состоит в доказательстве того, что решение является регулярным строго марковским процессом. Локальное поведение непрерывного строго марковского процесса в правой полуокрестности выделенной точки может быть охарактеризовано 4 параметрами $e_1, \dots, e_4$. Мы приводим их определение в параграфе 1.6. Эти параметры были введены В. Феллером [25], К. Ито и Г. Маккином [10]. Параметры показывают, может ли процесс выйти из этой точки вправо, может ли он достичь эту точку справа и т.д. Для *регулярного* строго марковского процесса они легко выражаются через его *естественную шкалу* и *меру скорости*. В теоремах 3.1–3.8 приводятся выражения для естественной шкалы и меры скорости построенного решения через коэффициенты b и σ исходного уравнения. Таким образом, параметры $e_1, \dots, e_4$ решения оказываются выраженными через b и σ, что и дает качественное описание поведения решения в правой полуокрестности нуля.

Если, например, коэффициенты b и σ удовлетворяют условиям теоремы 3.1, то мы говорим, что нуль имеет *правый тип 0*. Типы нумеруются цифрами $0, \dots, 7$. Типы 0, 1, 2 являются *выходными* в том смысле, что для них решение, выходящее из строго положительной точки, может достичь точку нуль. Типы 3, 4, 5, 6, 7 не являются выходными. Типы 2 и 3 являются *входными* в том смысле, что для них существует неотрицательное решение, выходящее из нуля. Типы 0, 1, 4, 5, 6, 7 не являются входными.

Поскольку мы предполагаем, что нуль — изолированная особая точка, то существует такое $a > 0$, что

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2} \in L^1_{loc}((0, a]),$$

т.е. эта функция локально интегрируема в каждой точке этого полуинтервала. В случае, когда нуль имеет один из типов $1, \dots, 7$, выполнено условие

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2}\, I\big((0, a]\big) \notin L^1_{loc}(0).$$

Если же нуль имеет правый тип 0, то

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2}\, I\big((0, a]\big) \in L^1_{loc}(0).$$

Поэтому тип 0 может быть назван *несингулярным типом*, в то время как типы $1, \dots, 7$ являются *сингулярными*. Изолированная особая точка имеет один из 8 возможных правых типов и один из 8 возможных левых типов. Если она имеет и левый, и правый тип 0, то функция $(1+|b|)/\sigma^2$ локально интегрируема в этой точке, и, следовательно, эта точка не является особой. Таким образом, всего существует 63 типа изолированных особых точек. Мы говорим, что точка *имеет тип* $(i{-}j)$, если она имеет левый тип i и правый тип j.

Большинство из этих 63 типов являются "хорошими" в том смысле, что они не нарушают единственность решения. Рассмотрим, например, уравнение (8). Для этого уравнения нуль имеет тип (1–1) (это вытекает из результатов параграфа 3.4). Как отмечалось выше, у уравнения (8) не существует решения, выходящего из нуля. Если $x \neq 0$, то у этого уравнения существует единственное решение, определенное до момента достижения нуля, и оно не может быть продолжено после этого момента (это является следствием теоремы 3.3, соответствующей типу 1). Таким образом, можно сказать, что для любой начальной точки x существует, и притом единственное, решение уравнения (8), определенное до момента первого попадания в нуль.

Однако 4 типа изолированных особых точек нарушают единственность решения. Это типы (2–2), (2–3), (3–2) и (3–3). Соответствующие им изолированные особые точки можно назвать *точками ветвления*. Если нуль является точкой ветвления, то существует как неотрицательное, так и неположительное решение, выходящее из нуля. Примером уравнения с точкой ветвления служит уравнение (9). При $\delta \geqslant 2$ нуль имеет тип (3–3). При $1 < \delta < 2$ нуль имеет тип (2–2). В любом случае у уравнения (9) существуют различные решения, выходящие из нуля. Если $\delta \geqslant 2$ и $x \neq 0$, то решение этого уравнения, выходящее из x, никогда не достигает нуля и является единственным. Если же $1 < \delta < 2$, то для любой начальной точки x решение неединственно. Это можно объяснить следующим образом. Решение, выходящее из x, достигает нуль за конечное время. После этого момента оно может "пойти как в положительном, так и в отрицательном направлении".

Данное наблюдение позволяет конструировать немарковские решения. Именно, выпустим решение из строго положительной точки. После момента первого достижения нуля продолжим решение в положительном или отрицательном направлении в зависимости от "прошлого" траектории. Известным примером уравнения, для которого не выполнена единственность и существуют немарковские решения, является пример Гирсанова (см. (2)). Уравнение (9) является другим примером такого рода с единичной диффузией. Если в примере Гирсанова неединственность объяснялась вырожденностью диффузии, то в настоящем примере источником неединственности является неограниченный снос.

В случае, когда изолированная особая точка имеет тип (2–2), решение может достигать нуль как с правой, так и с левой стороны. Поэтому оно будет достигать эту точку бесконечно часто. При каждом попадании в нуль решение может идти дальше как в положительном, так и в отрицательном направлении. Это приводит к тому, что существует огромное количество решений, не поддающихся никакому описанию. Иными словами, в такой ситуации коэффициенты b и σ не контролируют решение, и подход, основанный на стохастических дифференциальных уравнениях, "плохо работает" для описания диффузии.

В качестве примера применения полученных результатов мы рассматриваем степенные уравнения, т.е. уравнения вида

$$dX_t = \mu\,|X_t|^\alpha\, I(X_t \neq 0)\,dt + \big(\nu\,|X_t|^\beta\, I(X_t \neq 0) + \eta\, I(X_t = 0)\big)\,dB_t,$$

где $\nu \neq 0$, $\eta \neq 0$, и проводим классификацию правых типов нуля для этих уравнений (см. диаграмму на стр. 90).

В параграфе 3.5 мы рассматриваем уравнения, у которых снос b имеет постоянный знак. Оказывается, что для таких уравнений изолированная особая точка может иметь любой правый тип, кроме типов 6 и 7. Мы называем эти два типа *осциллирующими.* Пусть, например, нуль имеет правый тип 6. Тогда решение, выходящее из строго положительной точки x, может достичь нуль за конечное время. Однако при приближении решения к нулю расходится интеграл

$$\int_0^t \bigl(|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\bigr)\, ds. \tag{10}$$

Если обозначить через T_0 момент первого попадания решения в нуль (т.е. $T_0 = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = 0\}$), то интегралы

$$\int_0^{T_0} b(X_s)\, ds, \qquad \int_0^{T_0} \sigma(X_s)\, dB_s$$

не определены в классическом смысле. Согласно терминологии, вводимой в параграфе 2.4, построенное решение не будет решением до момента T_0, а лишь решением до T_0-. В частности, оно не может быть продолжено после T_0. С другой стороны, если при этом нуль имеет левый тип 2 или 3, то существует неположительное решение, выходящее из нуля. Его можно "склеить" с описанным выше решением. Согласно классическому определению, построенный таким способом процесс не будет решением уравнения (1), поскольку для него расходится интеграл (10). Чтобы этот процесс можно было бы назвать решением, необходимо обобщить классическое определение решения. Например, это обобщение могло бы состоять в замене интегралов Лебега-Стилтьеса и стохастических интегралов, фигурирующих в обычном определении, на интегралы в смысле *главного значения.*

4. Диссертация построена следующим образом.

В главе 1 мы приводим некоторые определения и известные факты из стохастического анализа. Они будут использоваться в последующих доказательствах.

В главе 2 дается определение *особой* точки и рассматриваются примеры уравнений с *изолированными особыми точками.* Эта глава содержит также определение решения до случайного момента времени и некоторые технические леммы.

В главе 3 формулируются и доказываются основные результаты.

Цитируемые утверждения носят название "предложение". Собственные результаты автора названы "теоремами" (вспомогательные утверждения называются "леммами"). Эти результаты содержатся в главах 2 и 3.

Нумерация утверждений сплошная внутри каждой главы. При этом используется двойная система нумерации, так что ссылка на теорему 3.1 указывает на первую теорему в третьей главе. То же самое относится и к нумерации формул.

5. Автор выступал с докладами на следующих конференциях, где излагались также и результаты, относящиеся к диссертации.

1. *Workshop on Mathematical Finance.* Конференция проводилась в мае 1998 г. в Париже в институте INRIA (Национальный научно-исследовательский институт по информатике и автоматике). Название доклада: Vector stochastic integrals in the fundamental theorem of asset pricing.

2. *Ломоносовские чтения-1999.* Конференция проводилась в апреле 1999 г. в МГУ им. М.В. Ломоносова. Название доклада: Сходимость некоторых интегралов, связанных с процессами Бесселя.

3. *Колмогоровские чтения-1999.* Конференция проводилась в апреле 1999 г. в МГУ им. М.В. Ломоносова. Название доклада: О сильных и слабых решениях стохастических дифференциальных уравнений, определяющих процессы Бесселя.

4. *Mathématiques Financières.* Конференция проводилась в июне 1999 г. в Париже в институте INRIA. Название доклада: Convergence of some integrals associated with Bessel processes.

5. *Second Nordic-Russian Symposium on Stochastic Analysis.* Конференция проводилась в августе 1999 г. в Норвегии. Название доклада: Integral functionals of Bessel processes.

6. *12th Winter School on Stochastic Processes.* Конференция проводилась в марте 2000 г. в Германии. Название доклада: Isolated singular points of stochastic differential equations.

В июле 1999 г. автор выступал с 4 научными докладами на факультете информатики и автоматики университета им. Ф. Шиллера г. Йены (Германия). Доклады были сделаны по следующим темам:

1. Интегральные функционалы от процессов Бесселя.
2. Сильные и слабые решения стохастических дифференциальных уравнений, определяющих процессы Бесселя.
3. О второй фундаментальной теореме финансовой математики для случая непрерывного времени.
4. Продолжение согласованных вероятностных мер.

Кроме того, по теме диссертации был сделан доклад на Большом Семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ.

Непосредственно к теме диссертации относятся следующие статьи: [42], [43], [44], [46], [47], [48].

Работа выполнена под руководством члена-корреспондента РАН, профессора А.Н. Ширяева, которому автор выражает искреннюю благодарность.

Глава 1

Вспомогательные сведения из стохастического анализа

Настоящая глава содержит некоторые определения и утверждения из стохастического анализа.

В параграфе 1.1 даются основные определения, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями.

В параграфах 1.2–1.4 содержатся некоторые утверждения из стохастического анализа, которые будут использоваться в последующих доказательствах.

В параграфе 1.5 мы приводим определения и известные факты, относящиеся к регулярным непрерывным строго марковским процессам.

В параграфе 1.6 рассматриваются параметры, которые описывают поведение непрерывного строго марковского процесса в односторонней окрестности выделенной точки.

§ 1.1 Стохастические дифференциальные уравнения

Определение 1.1. *Решение* уравнения (1) — это *пара* (Y, B) согласованных процессов на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q}\big)$, для которых

i) B является $(\mathcal{G}_t, \mathsf{Q})$-броуновским движением;

ii) для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \big(|b(Y_s)| + \sigma^2(Y_s)\big)\, ds < \infty \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.};$$

iii) для любого $t \geqslant 0$

$$Y_t = x + \int_0^t b(Y_s)\, ds + \int_0^t \sigma(Y_s)\, dB_s \quad \mathsf{Q}\text{-п.н.}$$

Определение 1.2. Решение (Y, B) называется *сильным*, если процесс Y согласован с фильтрацией $(\overline{\mathcal{F}}_t^B)$, т.е. с натуральной фильтрацией процесса B, пополненной множествами меры нуль.

Определение 1.3. Для уравнения (1) имеет место *слабая единственность* (или *единственность по распределению*), если для любых двух решений (Y, B) и $(\widetilde{Y}, \widetilde{B})$ с одним и тем же начальным условием $Y_0 = \widetilde{Y}_0 = x$ распределения процессов Y и $\widetilde{Y}$ совпадают.

Определение 1.4. Для уравнения (1) имеет место *сильная единственность* (или *потраекторная единственность*), если для любых двух решений (Y, B) и $(\widetilde{Y}, B)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве с одним и тем же броуновским движением B и одним и тем же начальным условием $Y_0 = \widetilde{Y}_0 = x$, процессы Y и $\widetilde{Y}$ неразличимы, т.е. $\mathsf{Q}\{\forall t \geqslant 0, Y_t = \widetilde{Y}_t\} = 1$.

Мы будем рассматривать только слабые решения, т.е. решения в смысле определения 1.1. При этом нам будет удобно понимать под решением не пару процессов, а меру на пространстве $C(\mathbb{R}_+)$ непрерывных функций $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Будем обозначать через X *канонический процесс* на $C(\mathbb{R}_+)$, т.е. процесс, определенный по формуле

$$X_t : C(\mathbb{R}_+) \ni \omega \longmapsto \omega(t) \in \mathbb{R}.$$

Через $(\mathcal{F}_t)$ обозначим *каноническую фильтрацию* на $C(\mathbb{R}_+)$, т.е. $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s;\, s \leqslant t)$, а через $\mathcal{F}$ — борелевскую σ-алгебру на $C(\mathbb{R}_+)$. Заметим, что $\mathcal{F} = \bigvee_{t \geqslant 0} \mathcal{F}_t$.

Мы будем пользоваться следующим определением решения.

Определение 1.5. *Решение* уравнения (1) — это *мера* P на $\mathcal{F}$ такая, что

i) $\mathsf{P}\{X_0 = x\} = 1$;

ii) для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \big(|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\big)\,ds < \infty \quad \mathsf{P}\text{-п.н.};$$

iii) процесс

$$M_t = X_t - \int_0^t b(X_s)\,ds \tag{1.1}$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом;

iv) процесс

$$M_t^2 - \int_0^t \sigma^2(X_s)\,ds \tag{1.2}$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом.

Для краткости мы будем в дальнейшем называть P *решением, выходящим из* x.

Замечания. (i) Если пользоваться определением 1.5, то понятие *единственности* решения не требует специального определения.

(ii) Определения 1.1 и 1.5 не затрагивают случай *взрывов*. В параграфе 2.4 мы даем определение *решения до случайного момента времени*. Это делает возможным рассмотрение взрывов. □

Следующее утверждение устанавливает связь между определениями 1.1 и 1.5.

Теорема 1.6. *Предположим, что* $\forall x \in \mathbb{R},\ \sigma(x) \neq 0$.

(i) *Пусть* (Y, B) — *решение* (1) *в смысле определения 1.1. Положим* $\mathsf{P} = \mathrm{Law}(Y_t;\, t \geqslant 0)$. *Тогда* P *является решением* (1) *в смысле определения 1.5.*

(ii) *Пусть* P *— решение* (1) *в смысле определения 1.5. Положим*

$$Y_t = X_t, \qquad B_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma(X_s)}\,dX_s - \int_0^t \frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)}\,ds. \tag{1.3}$$

Тогда пара (Y, B) *является решением* (1) *на фильтрованном вероятностном пространстве* $\big(C(\mathbb{R}_+), \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathsf{P}\big)$ *в смысле определения 1.1.*

Доказательство основано на непосредственной проверке.

На протяжении всей работы мы будем пользоваться только определением 1.5; X будет обозначать канонический процесс, а $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s;\, s \leqslant t)$ — каноническую фильтрацию.

Замечание. Для произвольного σ (без ограничения $\sigma \neq 0$) утверждение (i) теоремы 1.6 остается верным, в то время как (ii) теряет силу. Тем не менее, утверждение (ii) может быть переформулировано следующим образом: *если* P *является решением уравнения* (1) *в смысле определения 1.5, то существуют фильтрованное вероятностное пространство* $\big(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q}\big)$ *и пара процессов* (Y, B) *на этом пространстве таких, что* (Y, B) *— решение* (1) *в смысле определения 1.1 и* $\mathrm{Law}(Y_t;\, t \geqslant 0) = \mathsf{P}$. □

§ 1.2 Локальные времена

Доказательства утверждений, приведенных в этом параграфе, можно найти, например, в [34; ch. VI, §1].

На протяжении всего параграфа $(Z_t)_{t \geqslant 0}$ обозначает непрерывный семимартингал на фильтрованном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q}\big)$.

Предложение 1.7. *Для любого* $a \in \mathbb{R}$ *существует непрерывный возрастающий процесс* $L^a(Z)$ *такой, что*

$$(Z_t - a)^+ = (Z_0 - a)^+ + \int_0^t I(Z_s > a)\,dZ_s + \frac{1}{2} L_t^a(Z).$$

Определение 1.8. *Процесс* $L^a(Z)$ *называется локальным временем* Z *в точке* a.

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — некоторый интервал (он может быть открытым, замкнутым или полуоткрытым). Предположим, что функция $f : I \to \mathbb{R}$ является разностью двух выпуклых функций. Тогда f непрерывна и для любого $x \in \mathring{I}$ существуют лево- и правосторонние производные $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$. Более того, существует вторая производная f'' в смысле распределений. Это знакопеременная мера на I.

Предложение 1.9. (Формула Ито-Танака). *Предположим, что* Z *п.н. принимает значения в интервале* I *и* $f : I \to \mathbb{R}$ *— разность двух выпуклых функций. Предположим также, что у функции* f *существуют конечные односторонние производные в тех граничных точках* I, *которые принадлежат* I. *Тогда*

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'_-(Z_s)\,dZ_s + \frac{1}{2}\int_I L_t^x(Z)\,f''(dx).$$

(*Если левая граничная точка* a *интервала* I *принадлежит* I, *то мы полагаем* $f'_-(a) = 0$ *и считаем, что мера* f'' *имеет в точке* a *атом массы* $f'_+(a)$).

Предложение 1.10. *Для любой неотрицательной борелевской функции* h *и любого п.н. конечного момента остановки* T *выполнено*

$$\int_0^T h(Z_s)\,d\langle Z\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,L_T^x(Z)\,dx \quad \text{п.н.}$$

Предложение 1.11. *Для любого* a *мера* $dL^a(Z)$ *п.н. сосредоточена на множестве* $\{t : Z_t = a\}$.

Предложение 1.12. (i) *У процесса* $(L_t^a(Z); a \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+)$ *существует модификация такая, что отображение* $(a,t) \mapsto L_t^a(Z)$ *п.н. непрерывно по* t *и непрерывно справа с пределами слева по* a. *Более того,*

$$L_t^a(Z) - L_t^{a-}(Z) = 2\int_0^t I(Z_s = a)\,dZ_s, \tag{1.4}$$

где $L_t^{a-}(Z)$ *— левая модификация процесса* L.

(ii) *Локальное время броуновского движения обладает модификацией, непрерывной по паре* (a,t).

Предложение 1.13. *Если* B *— броуновское движение, выходящее из нуля, то для любого* $t>0$ *выполнено:* $L_t^0(B)>0$ *п.н.*

Предложение 1.14. *Пусть* B *— броуновское движение, выходящее из точки* b, *и* L *— его локальное время. Выберем* $c<b$. *Положим*

$$Z_\theta = L_{T_c(B)}^{\theta+c}(B), \quad \theta \geqslant 0,$$

где $T_c(B)=\inf\{t\geqslant 0 : B_t = c\}$.

(i) *Процесс* $(Z_\theta)_{\theta\in[0,b-c]}$ *имеет то же распределение, что и процесс* $(|W_\theta|^2)_{\theta\in[0,b-c]}$, *где* W *— двумерное броуновское движение, выходящее из нуля.*

(ii) *Для любого* $\theta\geqslant 0$

$$\mathsf{E}Z_\theta = 2\theta\wedge 2(b-c).$$

Утверждение (i) вытекает из *теоремы Рэя–Найта* (см., например, [34; ch. XI, (2.2)]) и свойства *автомодельности* броуновского движения. Утверждение (ii) содержится в [19; (1.2.3.1)].

§ 1.3 Случайная замена времени

Бо́льшая часть утверждений этого параграфа взята из [34; ch. V, §1].

Определение 1.15. Пусть $\bigl(\Omega,\mathcal{G},(\mathcal{G}_t),\mathsf{Q}\bigr)$ — фильтрованное вероятностное пространство. Мы предполагаем, что фильтрация $(\mathcal{G}_t)_{t\geqslant 0}$ непрерывна справа. *Заменой времени* τ называется семейство $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ моментов остановки такое, что отображения $t\mapsto\tau_t$ п.н. являются непрерывными справа неубывающими процессами (значение τ может равняться бесконечности). Мы также всегда будем предполагать, что $\tau_0=0$ п.н.

Предложение 1.16. *Пусть* $(A_t)_{t\geqslant 0}$ *— непрерывный справа неубывающий согласованный процесс на* $\big(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q}\big)$ *(он может принимать бесконечные значения). Положим*

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},$$

где $\inf\varnothing = \infty$. *Тогда* $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ *является заменой времени. Более того, фильтрация* $(\mathcal{G}_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$ *непрерывна справа, и для любого* $t \geqslant 0$ *с.в.* A_t *является* $(\mathcal{G}_{\tau_t})$*-моментом остановки.*

Предложение 1.17. *Если* $(H_t)_{t\geqslant 0}$ *—* $(\mathcal{G}_t)$*-прогрессивно измеримый процесс, то процесс* $(H_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$ *является* $(\mathcal{G}_{\tau_t})$*-прогрессивно измеримым.*

Замечание. Если H является всего лишь $(\mathcal{G}_t)$-согласованным, то H_{τ_t} может не быть $(\mathcal{G}_{\tau_t})$-согласованным. $\square$

Определение 1.18. Процесс X называется *τ-непрерывным*, если X постоянен на всех интервалах $[\tau_{t-}, \tau_t]$.

Следующее утверждение часто используется для проверки τ-непрерывности.

Предложение 1.19. *Если* M *— непрерывный локальный мартингал, то п.н. интервалы постоянства совпадают для* M *и* $\langle M\rangle$, *т.е. для п.в.* ω *мы имеем:* $M_t(\omega) = M_a(\omega)$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$ *в том и только в том случае, когда* $\langle M\rangle_a(\omega) = \langle M\rangle_b(\omega)$.

Доказательство содержится в [34; ch. IV, (1.13)].

Предложение 1.20. *Предположим, что* τ *п.н. конечно и* M *— непрерывный* $(\mathcal{G}_t)$*-локальный мартингал, являющийся* τ*-непрерывным. Тогда* M_{τ_t} *является непрерывным* $(\mathcal{G}_{\tau_t})$*-локальным мартингалом, причем* $\langle M_\tau\rangle_t = \langle M\rangle_{\tau_t}$.

Предложение 1.21. (Замена переменных в стохастическом интеграле). *Предположим, что τ п.н. конечно и M — непрерывный $(\mathcal{G}_t)$-локальный мартингал, причем M τ-непрерывен. Предположим, что H является $(\mathcal{G}_t)$-прогрессивно измеримым процессом и для любого $t \geqslant 0$*

$$\int_0^t H_s^2 \, d\langle M \rangle_s < \infty \quad \text{п.н.}$$

Тогда для любого $t \geqslant 0$

$$\int_0^t H_{\tau_s}^2 \, d\langle M \rangle_{\tau_s} < \infty \quad \text{п.н.}$$

и

$$\int_0^t H_{\tau_s} \, dM_{\tau_s} = \int_0^{\tau_t} H_s \, dM_s.$$

Предложение 1.22. (Замена переменных в интеграле Лебега–Стилтьеса). *Предположим, что τ п.н. конечно, процесс H $(\mathcal{G}_t)$-прогрессивно измерим, а X является возрастающим непрерывным справа τ-непрерывным процессом. Тогда*

$$\int_0^t H_{\tau_s} \, dX_{\tau_s} = \int_0^{\tau_t} H_s \, dX_s.$$

Нам также понадобится еще одна формула замены переменных.

Предложение 1.23. *Предположим, что $A : \mathbb{R}_+ \to [0, \infty]$ является непрерывной справа неубывающей функцией, причем $A_t \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$. Положим*

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\}, \quad \eta = \inf\{t \geqslant 0 : A_t = \infty\}.$$

Тогда для любого $t < A_{\eta-}$ и любой неотрицательной борелевской функции f справедливо равенство

$$\int_0^t f(\tau_s) \, ds = \int_0^{\tau_t} f(s) \, dA_s.$$

Доказательство содержится, например, в [34; ch. 0, (4.9)].

§ 1.4 Процессы с отражением и процессы Бесселя

Предложение 1.24. (Лемма Скорохода). *Пусть* $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ — *непрерывная функция, причем* $Z_0 \geqslant 0$. *Существует единственная пара функций* (Y, L) *таких, что*

i) $Y = Z + L$;

ii) $Y \geqslant 0$;

iii) L — *возрастающая непрерывная функция,* $L_0 = 0$ *и мера* dL *сосредоточена на множестве* $\{t \geqslant 0 : Y_t = 0\}$.

Функция L *задается формулой*

$$L_t = \sup_{s\leqslant t}(-Z_s \vee 0).$$

Доказательство содержится в [36] (см. также [34; ch. VI, (2.1)]).

Предложение 1.25. *Пусть* B — *броуновское движение, выходящее из нуля. Положим* $S_t = \sup_{s\leqslant t} B_s$. *Тогда*

$$\mathrm{Law}(S_t - B_t;\, t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(|B_t|;\, t \geqslant 0).$$

Это утверждение является следствием *теоремы П. Леви* (см. [34; ch. VI, (2.3)]).

Определение 1.26. *Трехмерным процессом Бесселя*, выходящим из нуля, называется модуль трехмерного броуновского движения, выходящего из нуля.

Предложение 1.27. *Пусть* B — *броуновское движение, выходящее из точки* $b > 0$. *Пусть* Z — *трехмерный процесс Бесселя, выходящий из нуля. Положим*

$$T_0(B) = \inf\{t \geqslant 0 : B_t = 0\},$$

$$U_a(B) = \sup\{t \leqslant T_0(B) : B_t = a\},$$

$$T_a(Z) = \inf\{t \geqslant 0 : Z_t = a\}.$$

Тогда

$$\mathrm{Law}\big(B_{T_0(B)-t};\, 0 \leqslant t \leqslant T_0(B) - U_a(B)\big) = \mathrm{Law}\big(Z_t;\, 0 \leqslant t \leqslant T_a(Z)\big).$$

Данное утверждение вытекает из [34; ch. VII, (4.6)].

Предложение 1.28. *Пусть Z — трехмерный процесс Бесселя, выходящий из нуля, а f — неотрицательная борелевская функция такая, что*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \int_0^\varepsilon x\, f(x)\, dx = \infty.$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \int_0^\varepsilon f(Z_s)\, ds = \infty \quad \text{п.н.}$$

Доказательство содержится в [33], [43].

§ 1.5 Непрерывные строго марковские процессы

Добавим к вещественной прямой изолированную точку $\{\pi\}$ и будем рассматривать функции, принимающие значения в $\mathbb{R} \cup \{\pi\}$.

Определение 1.29. Пространство $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ состоит из функций $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \cup \{\pi\}$ со следующим свойством: существует момент $\xi(f) \in [0, \infty]$ такой, что f непрерывна на $[0, \xi(f))$ и $f = \pi$ на $[\xi(f), \infty)$. Момент $\xi(f)$ называется *моментом убивания* f.

Замечание. Пространство $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ может быть наделено метрикой, превращающей его в *польское* пространство. При этом соответствующая борелевская σ-алгебра совпадает с $\sigma(X_t;\, t \geqslant 0)$, где X — канонический процесс на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$. Пространство $C(\mathbb{R}_+)$ является замкнутым подпространством $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ в этой метрике. □

Мы будем в дальнейшем пользоваться следующими обозначениями:

$$T_b = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = b\}, \tag{1.5}$$

$$\overline{T}_b = \sup\nolimits_n \inf\{t \geqslant 0 : |X_t - b| \leqslant 1/n\}, \tag{1.6}$$

$$T_{b,c} = T_b \wedge T_c, \tag{1.7}$$

$$\overline{T}_{b,c} = \overline{T}_b \wedge \overline{T}_c. \tag{1.8}$$

Если $X_0 = \pi$, то $T_b(X) = \overline{T}_b(X) = \infty$. Заметим также, что $T_b \neq \overline{T}_b$, поскольку процесс X может убиваться в момент достижения уровня b.

В дальнейшем будем обозначать через X канонический процесс на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ (он принимает значения в $\mathbb{R} \cup \{\pi\}$); через $(\mathcal{F}_t)$ — каноническую фильтрацию на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$, т.е. $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s;\ s \leqslant t)$; через $\mathcal{F}$ — σ-алгебру $\bigvee_{t\geqslant 0} \mathcal{F}_t = \sigma(X_s;\ s \geqslant 0)$. Заметим, что фильтрация $(\mathcal{F}_t)$ не непрерывна справа.

Определение 1.30. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — интервал. Он может быть замкнутым, открытым или полуоткрытым. Положим $\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. *Непрерывным строго марковским процессом* на I называется семейство $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ вероятностных мер на $\mathcal{F}$ такое, что

i) для любого $x \in I$

$$\mathsf{P}_x\{X_0 = x\} = 1, \quad \mathsf{P}_x\big\{\forall t \geqslant 0,\ X_t \in I \cup \{\pi\}\big\} = 1;$$

ii) для любого $A \in \mathcal{F}$ отображение $x \mapsto \mathsf{P}_x(A)$ является борелевским;

iii) для любого $(\mathcal{F}_t^+)$-момента остановки T, любой $\mathcal{F}$-измеримой неотрицательной функции Ψ и любого $x \in I$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_x}[\Psi \circ \Theta_T | \mathcal{F}_T^+] = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_{X_T}}[\Psi] \quad \mathsf{P}_x\text{-п.н.}$$

на множестве $\{X_T \neq \pi\}$. Через Θ_T обозначается сдвиг на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$, определенный по формуле

$$(\Theta_T \circ X)_t = \begin{cases} X_{t+T}, & \text{если } T < \infty, \\ \pi, & \text{если } T = \infty. \end{cases} \tag{1.9}$$

(Очевидно, отображение Θ_T является $\mathcal{F}|\mathcal{F}$-измеримым).

Предложение 1.31. *Предположим, что I и J — непересекающиеся интервалы, причем $I \cup J$ также является интервалом. Пусть $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ и $(\mathsf{Q}_x)_{x\in J}$ — непрерывные строго марковские процессы. Положим*

$$\mathsf{R}_x = \begin{cases} \mathsf{P}_x, & \text{если } x \in I, \\ \mathsf{Q}_x, & \text{если } x \in J. \end{cases}$$

Тогда $(\mathsf{R}_x)_{x\in I\cup J}$ — непрерывный строго марковский процесс.

Утверждение проверяется непосредственно.

Определение 1.32. *Регулярным* непрерывным строго марковским процессом на I называется семейство $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$, удовлетворяющее свойствам i)–iii) определения 1.30, а также следующим условиям:

iv) для любого $x \in I$ мы имеем на множестве $\{\xi < \infty\}$: $\lim_{t\uparrow\xi} X_t$ существует и не принадлежит I P_x-п.н. (здесь $\xi = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = \pi\}$). Иными словами, X может убиваться только в тех граничных точках интервала I, которые не принадлежат I;

v) для любых $x \in \overset{\circ}{I}$ и $y \in I$ выполнено $\mathsf{P}_x\{\exists t \geqslant 0 : X_t = y\} > 0$.

Для краткости мы будем в дальнейшем называть регулярные непрерывные строго марковские процессы просто *регулярными.*

Предложение 1.33. *Предположим, что $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ — регулярный процесс. Существует строго возрастающая непрерывная функция $s : I \to \mathbb{R}$ такая, что $s(X^{T_{a,b}})$ является P_x-локальным мартингалом для любых $a \leqslant x \leqslant b$ из I (через $X^{T_{a,b}}$ обозначается процесс X, остановленный в момент $T_{a,b}$, т.е. $X_t^{T_{a,b}} = X_{t\wedge T_{a,b}}$, где $T_{a,b}$ определен в (1.7)). Более того, функция s определена однозначно с точностью до аффинного преобразования, и она удовлетворяет следующему свойству: для любых $a \leqslant x \leqslant b$ из I выполнено*

$$\mathsf{P}_x\{T_b < T_a\} = \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)}.$$

Доказательство можно найти в [34; ch. VII, (3.2)] или [29; (20.7)].

Функция s с указанным свойством называется *естественной шкалой* процесса $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$.

Теперь мы переходим к еще одной характеристике регулярного процесса. Для $a \leqslant b$ из I положим

$$G_{a,b}(x,y) = \frac{\bigl(s(x)\wedge s(y) - s(a)\bigr)\bigl(s(b) - s(x)\vee s(y)\bigr)}{s(b)-s(a)}, \quad x,y\in[a,b].$$

Здесь s обозначает естественную шкалу процесса $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ (заметим, что выбор функции s неоднозначен).

Предложение 1.34. *Для регулярного процесса $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ существует единственная мера m на I такая, что для любой неотрицательной функции f и любых $a\leqslant x\leqslant b$ из I выполнено*

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_x}\Bigl[\int_0^{T_{a,b}} f(X_s)\,ds\Bigr] = 2\int_a^b G_{a,b}(x,y)\,f(y)\,m(dy).$$

Кроме того, m обладает следующими свойствами:

i) *для любых $a,b\in\overset{\circ}{I}$ выполнено: $m([a,b])\in(0,\infty)$;*

ii) *если левая граничная точка l интервала I принадлежит I, то для любого $a\in\overset{\circ}{I}$*

$$\int_l^a (x-l)\,m(dx) < \infty;$$

iii) *если правая граничная точка r интервала I принадлежит I, то для любого $a\in\overset{\circ}{I}$*

$$\int_a^r (r-x)\,m(dx) < \infty.$$

Доказательство см. в [34; ch. VII, (3.6)] или [29; (20.10)].

Мера m, определенная в предложении 1.34, называется *мерой скорости* процесса $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$.

Замечания. (i) Некоторые авторы используют термин *мера скорости* для $2m$, а не для m.

(ii) Мера m определена однозначно при фиксированном выборе естественной шкалы. Если взять другую естественную шкалу, то изменится функция G и, как следствие, мера m.

(iii) Свойства ii), iii) меры скорости вытекают из условия v) определения 1.32. $\square$

Пусть m — мера на I и B — броуновское движение, выходящее из точки $x \in I$. Положим

$$A_t = \int_I L_t^y(B)\, m(dy),$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},$$

$$\mathsf{P}_x = \mathrm{Law}(B_{\tau_t};\, t \geqslant 0).$$

Будем называть $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ *броуновским движением с заменой времени, основанной на* m.

Предложение 1.35. (i) *Предположим, что* m *удовлетворяет свойствам* i)–iii) *предложения 1.34 и интервал* I *замкнут в* $\mathbb{R}$. *Тогда броуновское движение с заменой времени, основанной на* m, *является регулярным процессом с естественной шкалой* $s(x) = x$ *и мерой скорости* m.

(ii) *Пусть* $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ *— регулярный процесс с естественной шкалой* $s(x) = x$ *и мерой скорости* m. *Предположим, что для любого* $x \in I$ *выполнено:* $\mathsf{P}_x\{\xi = \infty\} = 1$. *Тогда* $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ *является броуновским движением с заменой времени, основанной на* m.

Доказательство содержится в [29; (20.9)].

Предложение 1.36. *Предположим, что* $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ *является регулярным процессом с естественной шкалой* s *и мерой скорости* m. *Пусть* $\varphi : I \to J$ *— гомеоморфизм* I *на* J. *Пусть* Q_y *— образ* $\mathsf{P}_{\varphi^{-1}(y)}$ *при отображении* $X \mapsto s(X)$. *Тогда* $(\mathsf{Q}_y)_{y\in J}$ *является регулярным процессом с естественной шкалой* $s \circ \varphi^{-1}$ *и мерой скорости* $m \circ \varphi^{-1}$.

Доказательство проводится непосредственно.

§ 1.6 Граничное поведение строго марковского процесса

Пусть $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ — непрерывный строго марковский процесс и $d \in I \setminus \{r\}$, где r обозначает правую граничную точку I. Поведение процесса в правой полуокрестности точки d может быть охарактеризовано следующими параметрами:

$$\begin{aligned} e_1 &= \lim_{b\downarrow d} \mathsf{P}_d\{T_b < \theta\},\\ e_2 &= \lim_{c\downarrow d}\lim_{b\downarrow d} \mathsf{P}_b\{T_c < \theta\},\\ e_3 &= \lim_{b\downarrow d} \mathsf{P}_b\{T_d < \theta\},\\ e_4 &= \lim_{b\downarrow d} \mathsf{P}_b\{\overline{T}_d < \theta\}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где T, $\overline{T}$ определены в (1.5), (1.6), а $\theta > 0$ — произвольная константа.

Предложение 1.37. *Параметры $e_1, \dots, e_4$ не зависят от выбора $\theta > 0$. Более того, они могут образовывать только следующие комбинации:*

e_1	e_2	e_3	e_4
1	1	1	1
1	1	0	0
0	0	p	1
0	0	0	0
0	1	0	0

Переменная p может принимать любое значение из $[0,1]$.

Доказательство содержится в [10; § 3.3].

Замечание. Значение $p \in (0,1)$ отвечает тому случаю, когда процесс убивается с вероятностью $1-p$ в момент достижения точки d. □

Лемма 1.38. *Пусть I — интервал с левой граничной точкой 0. Предположим, что $\{0\} \in I$. Пусть $(\mathsf{P}_x)_{x\in I}$ регулярный процесс с мерой* *скорости* m. *Тогда*

$$e_1 = e_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \ m([0,a]) < \infty, \\ 0, & \text{если } \ m([0,a]) = \infty, \end{cases}$$

$$e_3 = e_4 = 1.$$

Здесь a *— произвольная точка из* $\mathring{I}$. $\big($*Из утверждения* i) *предложения 1.34 вытекает, что конечность* $m([0,a])$ *не зависит от выбора* $a\,\big)$.

Доказательство. Выражение для e_1 вытекает из известной классификации граничного поведения регулярного процесса (см., например, [29; (20.12)]).

Из равенства $e_1 = 1$ очевидно следует, что $e_2 = 1$. Предположим теперь, что $e_1 = 0$. При каждом $c > 0$ ($c \in I$) имеем

$$\mathsf{P}_b\{T_0 < T_c\} = \frac{s(c) - s(b)}{s(c) - s(0)} \xrightarrow[b \downarrow 0]{} 1,$$

и применение строго марковского свойства при $T = T_0$ показывает, что $e_2 = 0$.

Из свойства v) определения 1.32 следует, что $e_3 > 0$. Согласно предложению 1.37, $e_4 = 1$. Учитывая свойство iv) определения 1.32, заключаем, что $e_3 = 1$. □

Лемма 1.39. *Пусть* I *— интервал с левой граничной точкой* 0. *Предположим, что* $\{0\} \notin I$. *Пусть* $(\mathsf{P}_x)_{x \in I}$ *— регулярный процесс с естественной шкалой* s *и мерой скорости* m. *Определим* P_0 *как меру, сосредоточенную на* $X \equiv 0$. *Тогда* $(\mathsf{P}_x)_{x \in I \cup \{0\}}$ *является непрерывным строго марковским процессом. Он имеет следующие свойства.*

(i) *Если* $s(0+) > -\infty$, *то*

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0,$$

$$e_4 = \begin{cases} 1, & \text{если } \displaystyle\int_0^a \big(s(x) - s(0+)\big)\, m(dx) < \infty, \\ 0, & \text{если } \displaystyle\int_0^a \big(s(x) - s(0+)\big)\, m(dx) = \infty. \end{cases}$$

(ii) *Если* $s(0+) = -\infty$, *то*

$$e_1 = e_3 = e_4 = 0,$$

$$e_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \int_0^a |s(x)|\, m(dx) < \infty, \\ 0, & \text{если } \int_0^a |s(x)|\, m(dx) = \infty. \end{cases}$$

Здесь a *— произвольная точка из* $\overset{\circ}{I}$.

Доказательство. **(i)** Равенства $e_1 = e_3 = 0$ очевидны. Из соотношения

$$\mathsf{P}_b\{\overline{T}_0 < T_c\} = \frac{s(c) - s(b)}{s(c) - s(0+)} \xrightarrow[b \downarrow 0]{} 1$$

получаем $e_2 = 0$. Выражение для e_4 вытекает из [29; (20.12)].

(ii) Докажем, что $e_4 = 0$. При $0 < c < b$ имеем

$$\mathsf{P}_c\{\overline{T}_0 < T_b\} = \lim_{d \downarrow 0} \mathsf{P}_c\{T_d < T_b\} = \lim_{d \downarrow 0} \frac{s(b) - s(c)}{s(b) - s(d)} = 0. \tag{1.11}$$

Положим

$$U^1 = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = b\}, \qquad V^1 = \inf\{t \geqslant U^1 : X_t = c\},$$
$$U^{n+1} = \inf\{t \geqslant V^n : X_t = b\}, \qquad V^{n+1} = \inf\{t \geqslant U^{n+1} : X_t = c\}.$$

В силу равенства (1.11) и строго марковского свойства, примененного в моменты V^n, имеем: $\overline{T}_0 > U^n$ P_c-п.н. для любого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку X непрерывен, это означает, что $\mathsf{P}_c\{\overline{T}_0 = \infty\} = 1$.

Выражение для e_2 вытекает из [29; (20.12)]. □

В завершение этого параграфа приведем утверждение о том, что в некоторых случаях регулярный процесс может быть "продолжен" до граничной точки.

Предложение 1.40. *Пусть* I *— интервал с левой граничной точкой* 0. *Предположим, что* $\{0\} \notin I$. *Пусть* $(\mathsf{P}_x)_{x \in I}$ *— регулярный процесс, для которого* $e_2 = 1$, $e_4 = 0$ *(в этом случае* 0 *называется* *границей-входом). Тогда существует мера* P_0 *такая, что* $(\mathsf{P}_x)_{x\in I\cup\{0\}}$ *является непрерывным строго марковским процессом с*

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = 0.$$

Доказательство содержится в [29; (20.13)].

Глава 2

Необходимые определения и предварительные утверждения

В параграфе 2.1 мы даем определение особой точки. Также в этом параграфе приводятся аргументы в пользу того, что эти точки действительно "особые".

Параграф 2.2 содержит несколько примеров уравнений с изолированной особой точкой. Эти примеры показывают, как может вести себя решение в окрестности такой точки.

В силу нескольких причин нам необходимо ввести определение решения до некоторого случайного момента. Во-первых, решение может взрываться. Во-вторых, решение может убиваться в тот момент, когда оно достигает некоторого уровня (см. замечание после примера 2.11). В-третьих, мы в некоторых случаях можем гарантировать существование решения только до момента первого выхода из некоторого интервала, но не можем ничего сказать про существование решения после этого момента (см. параграф 3.1).

Для того чтобы определить решение до случайного момента, мы заменяем пространство непрерывных функций $C(\mathbb{R}_+)$ пространством $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ функций, которые убиваются в некоторый момент.

В параграфе 2.3 приводятся некоторые технические утверждения, связанные с пространством $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$.

В параграфе 2.4 мы даем определение решения до случайного момента.

§ 2.1 Изолированные особые точки: определение

На протяжении всего параграфа мы делаем следующее предположение: $\forall x \in \mathbb{R},\ \sigma(x) \neq 0$.

Определение 2.1. Измеримая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *локально интегрируема в точке* $d \in \mathbb{R}$, если существует $\delta > 0$, для которого

$$\int_{d-\delta}^{d+\delta} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Мы будем использовать обозначение: $f \in L^1_{loc}(d)$.

Определение 2.2. Измеримая функция f *локально интегрируема на множестве* $D \subseteq \mathbb{R}$, если f локально интегрируема в каждой точке $d \in D$. Обозначение: $f \in L^1_{loc}(D)$.

Предложение 2.3. *Предположим, что для уравнения* (1) *выполнено условие*

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ *существует единственное решение уравнения* (1).

Доказательство содержится в [23], [24].

Замечание. При условиях предложения 2.3 решение может взрываться за конечное время. □

В главе 3 доказывается следующий локальный аналог предложения 2.3 (см. теорему 3.1). *Если функция* $(1+|b|)/\sigma^2$ *локально интегрируема в точке* d, *то у уравнения* (1) *существует единственное решение "в окрестности точки* d *".* Поэтому такая точка может быть названа "неособой".

Определение 2.4. Точка d называется *особой точкой* для уравнения (1), если
$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \notin L^1_{loc}(d).$$

Определение 2.5. Точка d называется *изолированной особой точкой* для (1), если d — особая точка и существует проколотая окрестность точки d, состоящая из неособых точек.

Следующие пять утверждений показывают, что особые точки в смысле определения 2.4 действительно являются "особыми".

Предложение 2.6. *Предположим, что*
$$\frac{|b|}{\sigma^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{\sigma^2} \notin L^1_{loc}(d).$$
Тогда у уравнения (1) *не существует решения, выходящего из* d.

Доказательство содержится в [23], [24].

Теорема 2.7. *Пусть* I *— открытый интервал. Предположим, что* $|b|/\sigma^2 \notin L^1_{loc}(x)$ *для любого* $x \in I$. *Тогда для любого* $x \in I$ *не существует решения уравнения* (1), *выходящего из* x.

Доказательство. Предположим, что P — решение уравнения (1), выходящее из $x \in I$. Пусть X обозначает канонический процесс на $C(\mathbb{R}_+)$. Согласно предложению 1.10 и определению решения, имеем
$$\int_0^t |b(X_s)|\,ds = \int_0^t \frac{|b(X_s)|}{\sigma^2(X_s)}\,d\langle X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \frac{|b(y)|}{\sigma^2(y)}\,L^y_t(X)\,dy < \infty \quad \mathsf{P}\text{-п.н.} \qquad (2.1)$$
Поскольку $L^y_t(X)$ непрерывна справа по y (см. предложение 1.12 (i)), то
$$\mathsf{P}\big\{\forall t \geqslant 0,\ \forall y \in I,\ L^y_t(X) = 0\big\} = 1.$$

Следовательно, для момента остановки $T = 1 \wedge \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin I\}$ выполнено:
$$T = \int_0^T 1\,ds = \int_0^T \sigma^{-2}(X_s)\,d\langle X\rangle_s =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \sigma^{-2}(y)\,L^y_T(X)\,dy = \int_I \sigma^{-2}(y)\,L^y_T(X)\,dy = 0.$$

(Мы воспользовались предложением 1.11). Это приводит к противоречию, поскольку $T > 0$. $\square$

Теорема 2.8. *Предположим, что d — особая точка для уравнения (1) и P — решение, выходящее из некоторой точки x. Тогда для любого $t \geqslant 0$ выполнено: $L_t^d(X) = L_t^{d-}(X) = 0$ P-п.н.*

Доказательство. Поскольку точка d — особая, то

$$\forall \varepsilon > 0, \int_d^{d+\varepsilon} \frac{1+|b|}{\sigma^2}\, dx = \infty \tag{2.2}$$

или

$$\forall \varepsilon > 0, \int_{d-\varepsilon}^{d} \frac{1+|b|}{\sigma^2}\, dx = \infty. \tag{2.3}$$

Если выполнено (2.2), то из (2.1) и непрерывности $L_t^y(X)$ справа по y следует, что $\forall t \geqslant 0$, $L_t^d(X) = 0$ P-п.н.. Если выполнено (2.3), то $\forall t \geqslant 0$, $L_t^{d-}(X) = 0$ P-п.н..

Пусть B — процесс, определенный в (1.3). Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^t I(X_s = d)\, dX_s = \\ = \int_0^t I(X_s = d)\, b(X_s)\, ds + \int_0^t I(X_s = d)\, \sigma(X_s)\, dB_s = \\ = \int_0^t I(X_s = d)\, b(X_s)\, ds + M_t,\end{aligned}$$

где M является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$-локальным мартингалом. Согласно предложению 1.10,

$$\begin{aligned}\int_0^t I(X_s = d)\, b(X_s)\, ds = \int_0^t \frac{I(X_s = d)\, b(X_s)}{\sigma^2(X_s)}\, d\langle X\rangle_s = \\ = \int_0^t \frac{I(x = d)\, b(x)}{\sigma^2(x)}\, L_t^x(X)\, dx = 0 \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}\end{aligned}$$

и аналогично,

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t I(X_s = d)\, \sigma^2(X_s)\, ds = 0 \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

Итак,
$$\int_0^t I(X_s = d)\, dX_s = 0 \tag{2.4}$$
и, с учетом равенства (1.4),
$$L_t^d(X) = L_t^{d-}(X) \quad \mathsf{P}\text{-п.н.} \tag{2.5}$$

Выше мы доказали, что $L_t^d(X) = 0$ или $L_t^{d-}(X) = 0$. Сопоставляя это с (2.5), приходим к требуемому утверждению. □

Теорема 2.9. *Предположим, что d — неособая точка для уравнения* (1) *и* P *— решение, выходящее из некоторой точки x. Предположим также, что $\mathsf{P}\{T_d < \infty\} > 0$, где T_d определено в* (1.5)*. Тогда для любого $t > 0$ выполнено: $L_t^d(X) > 0$, $L_t^{d-}(X) > 0$ P-п.н. на множестве $\{t > T_d\}$.*

Доказательство этого утверждения содержится в параграфе 3.2 (стр. 64).

Теорема 2.10. *Предположим, что*
$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad \frac{1+|b|}{\sigma^2} \notin L^1_{loc}(0).$$
Тогда имеются только следующие 4 возможности:

1. *Не существует решения, выходящего из нуля.*

2. *Существует единственное решение, выходящее из нуля, и оно неотрицательно* (*т.е.* $\mathsf{P}\{\forall t \geqslant 0,\, X_t \geqslant 0\} = 1$).

3. *Существует единственное решение, выходящее из нуля, и оно неположительно.*

4. *Существует как неотрицательное, так и неположительное решение, выходящее из нуля.* (*В этом случае могут также существовать знакопеременные решения*).

Доказательство этого утверждения вытекает из двусторонней классификации изолированных особых точек (см. параграф 3.3).

Теорема 2.10 показывает качественное различие между особыми и неособыми точками в смысле определения 2.4. Если 0 — неособая точка, то решение, выходящее из нуля, единственно и является знакопеременным (оно определено в окрестности нуля). Если же 0 является особой точкой, то такая ситуация невозможна.

§ 2.2 Изолированные особые точки: примеры

Пример 2.11. *Для уравнения*

$$dX_t = -\frac{1}{2X_t}\, I(X_t \neq 0)\, dt + dB_t \tag{2.6}$$

не существует решения, выходящего из нуля.

Доказательство. Предположим, что P — решение, выходящее из нуля. Обозначим через B процесс, определенный в (1.3). По формуле Ито,

$$X_t^2 = -\int_0^t I(X_s \neq 0)\, ds + 2\int_0^t X_s\, dB_s + t = \int_0^t I(X_s = 0)\, ds + 2\int_0^t X_s\, dB_s.$$

Согласно предложению 1.10,

$$\int_0^t I(X_s = 0)\, ds = \int_0^t I(X_s = 0)\, d\langle X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} I(x = 0)\, L_t^x(X)\, dx = 0.$$

Итак, X^2 является локальным мартингалом с $X_0^2 = 0$. Следовательно, $X_t^2 = 0$ P-п.н. С другой стороны, мера, сосредоточенная на $X \equiv 0$, не является решением (1). □

Замечание. Если $X_0 \neq 0$, то у (2.6) не существует решения в смысле определения 1.5. Однако (2.6) обладает решением до момента $T_0 = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = 0\}$ в смысле определения 2.21. Более того, это решение единственно. □

Пример 2.12. *Рассмотрим уравнение*

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2X_t}\, I(X_t \neq 0)\, dt + dB_t, \quad X_0 = x, \tag{2.7}$$

где $\delta > 1$ *.*

(i) *Если* $x \neq 0$ *и* $\delta \geqslant 2$ *, то у* (2.7) *существует единственное решение.*

(ii) *Если* $x = 0$ *или* $1 < \delta < 2$ *, то у* (2.7) *существуют различные решения.*

Доказательство. **(i)** Без ограничения общности предположим, что $x > 0$. Обозначим через P распределение *процесса Бесселя размерности* δ, выходящего из x. Как известно, P является решением уравнения (2.7) (см. [34; ch. XI, §1]). Пусть P' — другое решение. Положим

$$\mathsf{Q} = \mathrm{Law}(X_t^2;\, t \geqslant 0 \,|\, \mathsf{P}), \quad \mathsf{Q}' = \mathrm{Law}(X_t^2;\, t \geqslant 0 \,|\, \mathsf{P}').$$

Согласно формуле Ито, меры Q и Q' являются решениями уравнения

$$dX_t = \delta dt + 2|X_t|\, dB_t, \quad X_0 = x^2. \tag{2.8}$$

Для этого уравнения коэффициент сноса b равен константе, а коэффициент диффузии σ является гельдеровым порядка $1/2$. Поэтому для (2.8) имеют место даже сильное существование и сильная единственность (см. [31]). По теореме *Ямада-Ватанабе* (см. [40]), решение (2.8) слабо единственно, т.е. $\mathsf{Q}' = \mathsf{Q}$. Из свойств процессов Бесселя вытекает, что $\mathsf{Q}\{\forall t \geqslant 0,\ X_t > 0\} = 1$ при $\delta \geqslant 2$ (см. [34; ch. XI, §1]). Поскольку процесс X непрерывен, получаем $\mathsf{P} = \mathsf{P}'$.

(ii) Предположим сначала, что $x = 0$. Определим меру P так же, как и выше (тогда P является решением уравнения (2.7)). Обозначим через P' образ P при отображении $X \mapsto -X$. Легко проверить, что P' также является решением (2.7), выходящим из нуля. При этом меры P и P' различны, т.к.

$$\mathsf{P}\{\forall t \geqslant 0,\ X_t \geqslant 0\} = 1, \quad \mathsf{P}'\{\forall t \geqslant 0,\ X_t \leqslant 0\} = 1.$$

Более того, при любом $\alpha \in (0,1)$ мера $\mathsf{P}^\alpha = \alpha\mathsf{P} + (1-\alpha)\mathsf{P}'$ также является решением.

Предположим теперь, что $x > 0$. Пусть P — распределение процесса Бесселя размерности δ, выходящего из точки x. Поскольку $1 < \delta < 2$, имеем: $\mathsf{P}\{\exists t > 0 : X_t = 0\} = 1$ (см. [34; ch. XI, §1]). Обозначим через P' образ меры P при отображении

$$C(\mathbb{R}_+) \ni X \longmapsto X' \in C(\mathbb{R}_+),$$

$$X'_t = \begin{cases} X_t, & \text{если } t \leqslant T_0, \\ -X_t, & \text{если } t > T_0, \end{cases}$$

где T_0 определен в (1.5). Тогда P' также является решением (2.7). $\square$

Замечания. (i) Уравнение (2.7) обладает различными *сильными* решениями, а также *слабыми* решениями (см. [42], [48]). Однако сильные решения не рассматриваются в данной работе.

(ii) При $1 < \delta < 2$ у уравнения (2.7) существуют решения, не являющиеся марковскими. Для построения такого решения достаточно рассмотреть отображение

$$C(\mathbb{R}_+) \ni X \longmapsto X'' \in C(\mathbb{R}_+),$$

$$X''_t = \begin{cases} X_t, & \text{если } t \leqslant T_0, \\ X_t, & \text{если } t > T_0 \text{ и } X_{T_0/2} > 1, \\ -X_t, & \text{если } t > T_0 \text{ и } X_{T_0/2} \leqslant 1. \end{cases}$$

(Здесь мы предполагаем, что $x \neq 0$). Тогда образ P'' меры P при этом отображении является немарковским решением уравнения (2.7). $\square$

§ 2.3 Некоторые вспомогательные леммы

Напомним, что $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ обозначает пространство непрерывных функций, которые убиваются в некоторый момент (см. определение 1.29); X — канонический процесс на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$; $(\mathcal{F}_t)$ — каноническая фильтрация.

Все утверждения данного параграфа применимы к пространству $C(\mathbb{R}_+)$, равно как и к $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$.

Для полноты изложения приведем несколько определений.

Определение 2.13. Отображение $T : \overline{C}(\mathbb{R}_+) \to [0, \infty]$ называется *предсказуемым моментом остановки*, если существует такая последовательность $(\mathcal{F}_t)$-моментов остановки (T_n), что

i) $T_n \leqslant T_{n+1}$;

ii) $T_n < T$ на множестве $\{T > 0\}$;

iii) $\lim_n T_n = T$.

В дальнейшем будем называть (T_n) *предвещающей последовательностью* для T.

Замечание. Момент T_b, определенный в (1.5), не является предсказуемым, поскольку канонический процесс X может убиваться в момент достижения уровня b. С другой стороны, момент $\overline{T}_b$, определенный в (1.6), является предсказуемым моментом с предвещающей последовательностью

$$\overline{T}_b^n = n \wedge \inf\{t \geqslant 0 : |X_t - b| \leqslant 1/n\}. \qquad \square$$

Определение 2.14. Пусть T — момент остановки на $(\mathcal{F}_t)$. Через $\mathcal{F}_{T-}$ будем обозначать σ-алгебру, порожденную множествами $A \cap \{T > t\}$, где $t \geqslant 0$ и $A \in \mathcal{F}_t$.

Докажем теперь несколько технических лемм, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 2.15. *Пусть T — момент остановки на $(\mathcal{F}_t)$. Тогда с.в. $X_T\, I(T < \infty)$ является $\mathcal{F}_T | \mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{\pi\})$-измеримой.*

Доказательство. При $\alpha \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ имеем

$$\{X_T < \alpha\} \cap \{T < t\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{p,q \in \mathbb{Q} \cap (0,t) \\ |p-q| < 1/n}} \{p < T < q\} \cap \{X_p \leqslant \alpha - 1/m\},$$

$$\{X_T < \alpha\} \cap \{T \leqslant t\} = \big(\{X_T < \alpha\} \cap \{T < t\}\big) \cup \big(\{X_t < \alpha\} \cap \{T = t\}\big),$$

$$\{X_T = \pi\} \cap \{T \leqslant t\} = \{T \leqslant t\} \setminus \bigl(\{X_T \in \mathbb{R}\} \cap \{T \leqslant t\}\bigr).$$

Следовательно, для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{\pi\})$

$$\{X_T \in A\} \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,$$

откуда вытекает требуемое утверждение. □

Лемма 2.16. *Пусть T — момент остановки на $(\mathcal{F}_t)$ и $A \in \mathcal{F}$. Положим $X_t^T = X_{t\wedge T}$. Тогда для выполнения условия $A \in \mathcal{F}_T$ необходимо и достаточно, чтобы $A = \{X : X^T \in A\}$.*

Доказательство. Достаточность вытекает из леммы 2.15. Докажем необходимость. Легко проверить, что для любого $t \geqslant 0$ и $D \in \mathcal{F}_t$

$$X \in D \iff X^t \in D.$$

Положим $B_t = \{T \leqslant t\}$, $A_t = A \cap \{T \leqslant t\}$. Для любого $t \geqslant 0$ имеем

$$T(X) = t \text{ и } X \in A \iff \forall s < t,\, X^s \notin B_s \text{ и } X^t \in A_t;$$
$$T(X) = t \text{ и } X \notin A \iff \forall s < t,\, X^s \notin B_s \text{ и } X^t \in B_t,\, X^t \notin A_t.$$

Эти утверждения верны и при $t = \infty$ (необходимо положить $B_\infty = \Omega$, $A_\infty = A$, $X^\infty = X$). Тогда для любого $t \in [0, \infty]$ мы можем написать

$$T(X) = t \text{ и } X \in A \implies \forall s < t,\, (X^t)^s \notin B_s \text{ и } (X^t)^t \in A_t \implies$$
$$\implies \forall s < t,\, (X^T)^s \notin B_s \text{ и } (X^T)^t \in A_t \implies T(X^T) = t \text{ и } X^T \in A;$$

$$T(X) = t \text{ и } X \notin A \implies$$
$$\implies \forall s < t,\, (X^t)^s \notin B_s \text{ и } (X^t)^t \in B_t,\, (X^t)^t \notin A_t \implies$$
$$\implies \forall s < t,\, (X^T)^s \notin B_s \text{ и } (X^T)^t \in B_t,\, (X^T)^t \notin A_t \implies$$
$$\implies T(X^T) = t \text{ и } X^T \notin A.$$

Это завершает доказательство. □

Лемма 2.17. *Пусть* T *— момент остановки на* $(\mathcal{F}_t^+)$, *где* $\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. *Пусть* $A \in \mathcal{F}$. *Тогда для выполнения условия* $A \in \mathcal{F}_T^+$ *необходимо и достаточно, чтобы* $A = \{X : X^{T+\delta} \in A\}$ *для любого* $\delta > 0$.

Доказательство. Это утверждение следует из леммы 2.16 и равенства $\mathcal{F}_T^+ = \bigcap_{\delta>0} \mathcal{F}_{T+\delta}$. □

Лемма 2.18. *Предположим, что* T *является моментом остановки на* $(\mathcal{F}_t)$ *и* P *— вероятностная мера на* $\mathcal{F}_T$. *Отображение*

$$\Phi_T : \overline{C}(\mathbb{R}_+) \ni X \longmapsto X^T \in \overline{C}(\mathbb{R}_+) \tag{2.9}$$

является $\mathcal{F}_T|\mathcal{F}$ *-измеримым. Кроме того,* $\mathsf{P} \circ \Phi_T^{-1}|\mathcal{F}_T = \mathsf{P}$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из леммы 2.15, а второе — из леммы 2.16. □

Лемма 2.19. *Пусть* T *— момент остановки на* $(\mathcal{F}_t)$. *Положим*

$$\overline{X}_t^T = \begin{cases} X_t, & \text{если } t < T, \\ \pi, & \text{если } t \geqslant T. \end{cases}$$

Тогда отображение

$$\overline{\Phi}_T : \overline{C}(\mathbb{R}_+) \ni X \longmapsto \overline{X}^T \in \overline{C}(\mathbb{R}_+) \tag{2.10}$$

является $\mathcal{F}_{T-}|\mathcal{F}$ *-измеримым.*

Доказательство. Для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$ имеем

$$\{\overline{X}_t^T < \alpha\} = \{X_t < \alpha\} \cap \{T > t\}.$$

Следовательно, с.в. является $\overline{X}_t^T$ $\mathcal{F}_{T-}$-измеримой, откуда вытекает измеримость $\overline{\Phi}_T$. □

Лемма 2.20. *Пусть* T *— момент остановки на* $(\mathcal{F}_t)$ *и* P , P' *— две вероятностные меры на* $\mathcal{F}_{T-}$. *Предположим, что существует последовательность моментов остановки* (T_n) *таких, что*

i) $T_n \leqslant T_{n+1}$ P, P' *-п.н.;*

ii) $T_n < T$ P, P' *-п.н. на множестве* $\{T > 0\}$ *;*

iii) $\lim_n T_n = T$ P, P' *-п.н.;*

iv) $\mathsf{P}|\mathcal{F}_{T_n} = \mathsf{P}'|\mathcal{F}_{T_n}$.

Тогда $\mathsf{P} = \mathsf{P}'$.

Доказательство. Возьмем $t \geqslant 0$ и $A \in \mathcal{F}_t$. Тогда

$$\mathsf{P}\big(A \cap \{T > t\}\big) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(A \cap \{T_n > t\}\big) = \\ = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}'\big(A \cap \{T_n > t\}\big) = \mathsf{P}'\big(A \cap \{T > t\}\big).$$

Для завершения доказательства достаточно применить *лемму о монотонных классах.* □

§ 2.4 Решения до случайного момента времени

В дальнейшем нам потребуются два различных определения: решение до T и решение до $T-$.

Определение 2.21. Пусть T — момент остановки на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$. *Решением* (1) *до* T (или решением (1), *определенным* до T) называется мера P на $\mathcal{F}_T$ такая, что

i) $\mathsf{P}\{X_0 = x\} = 1$;

ii) $\int_0^T \big(|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\big)\, ds < \infty$ P-п.н.;

iii) процесс

$$M_t = X_{t\wedge T} - \int_0^{t\wedge T} b(X_s)\, ds$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$ -локальным мартингалом;

iv) процесс

$$M_t^2 - \int_0^{t\wedge T} \sigma^2(X_s)\, ds$$

является $(\mathcal{F}_t, \mathsf{P})$ -локальным мартингалом.

Далее в некоторых случаях будем называть *пару* (P, T) решением (1).

Замечания. (i) Свойства i)–iv) показывают, что $T < \xi$ P-п.н., где $\xi = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = \pi\}$.

(ii) Мера P задана на $\mathcal{F}_T$, а не на $\mathcal{F}$, поскольку иначе она не будет единственной.

(iii) В обычном определении локального мартингала вероятностная мера задана на всей σ-алгебре $\mathcal{F}$. Однако в определении 2.21 мера P определена на меньшей σ-алгебре $\mathcal{F}_T$. Поэтому свойство iii) понимается следующим образом. Существует последовательность (T_n) моментов остановки таких, что

i) $T_n \leqslant T_{n+1}$;

ii) $T_n \leqslant T$ P-п.н. (заметим, что $\{T_n \leqslant T\} \in \mathcal{F}_T$);

iii) $\lim_n T_n = T$ P-п.н.;

iv) для любых $s \leqslant t$, $C \in \mathcal{F}_s$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\big[I(C)\,(M_{T\wedge T_n\wedge t} - M_{T\wedge T_n\wedge s})\big] = 0.$$

Заметим, что с.в.

$$I(C)\,(M_{T\wedge T_n\wedge t} - M_{T\wedge T_n\wedge s}) = I\big(C \cap \{T \wedge T_n > s\}\big)\,(M_{T\wedge T_n\wedge t} - M_{T\wedge T_n\wedge s})$$

является $\mathcal{F}_T$-измеримой.

Аналогично, для проверки свойств i), ii), iv) достаточно знать значения P только на $\mathcal{F}_T$. □

Определение 2.22. Пусть T — предсказуемый момент остановки на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ с предвещающей последовательностью (T_n). *Решением* (1) *до* $T-$ (или решением (1), *определенным* до $T-$) называется такая мера P на $\mathcal{F}_{T-}$, что для любого n сужение P на $\mathcal{F}_{T_n}$ является решением до T_n.

Далее в некоторых случаях будем называть *пару* $(\mathsf{P}, T-)$ решением (1).

Замечания. (i) Очевидно, последнее определение не зависит от выбора предвещающей последовательности для T.

(ii) Если (P, T) — решение, то $T \leqslant \xi$ P-п.н.

(iii) Будем называть последовательность (T_n) P*-предвещающей* для T, если

i) $T_n \leqslant T_{n+1}$ P-п.н.;

ii) $T_n < T$ P-п.н. на множестве $\{T > 0\}$;

iii) $\lim_n T_n = T$ P-п.н.

Для того чтобы проверить, является ли мера P на $\mathcal{F}_{T-}$ решением (1) до $T-$, достаточно брать P-предвещающие последовательности для T вместо предвещающих. □

Следующее утверждение проясняет связь между определениями решения до случайного момента и стандартным определением 1.5.

Теорема 2.23. (i) *Предположим, что* $(\mathsf{P}, T-)$ *— решение* (1) *и* $T = \infty$ P*-п.н.* (*заметим, что с.в.* T $\mathcal{F}_{T-}$*-измерима*). *Тогда* P *может быть единственным образом продолжена до меры* $\widetilde{\mathsf{P}}$ *на* $\mathcal{F}$. *Обозначим через* Q *меру на* $C(\mathbb{R}_+)$, *полученную как сужение* $\widetilde{\mathsf{P}}$ *на множество* $\{\xi = \infty\}$. (*Здесь мы пользуемся очевидным свойством* $\overline{C}(\mathbb{R}_+) \cap \{\xi = \infty\} = C(\mathbb{R}_+)$). *Тогда* Q *является решением* (1) *в смысле определения 1.5.*

(ii) *Предположим, что* Q *— решение* (1) *в смысле определения 1.5. Зададим меру* P *на* $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$ *по формуле* $\mathsf{P}(A) = \mathsf{Q}(A \cap \{\xi = \infty\})$. *Тогда* $(\mathsf{P}, \infty-)$ *является решением* (1) *в смысле определения 2.22.*

Доказательство. **(i)** Существование и единственность $\widetilde{\mathsf{P}}$ следуют из легко проверяемого равенства

$$\mathcal{F}|\{T = \infty\} = \mathcal{F}_{T-}|\{T = \infty\}.$$

Доказательство второй части утверждения, а также **(ii)** очевидно. □

Глава 3

Основные результаты: классификация изолированных особых точек

В настоящей главе мы исследуем поведение решения уравнения (1) в окрестности изолированной особой точки, которая предполагается равной нулю.

В параграфе 3.1 изучается поведение решения в правой полуокрестности нуля и проводится полная качественная классификация в терминах параметров $e_1, \dots, e_4$, определенных в (1.10).

Доказательства теорем, сформулированных в параграфе 3.1, собраны в параграфе 3.2.

В параграфе 3.3 мы исследуем поведение решения в двусторонней окрестности нуля и описываем те изолированные особые точки, которые нарушают единственность решения.

В параграфе 3.4 полученные результаты применяются к степенным уравнениям.

В параграфе 3.5 мы рассматриваем уравнения, у которых снос b имеет постоянный знак, и исследуем, какие правые типы возможны, если снос неотрицателен/неположителен.

Оказывается, что для уравнений со сносом постоянного знака возможны все типы, за исключением 6 и 7. Поэтому последние могут быть названы *осциллирующими* типами. В параграфе 3.6 приводятся примеры, показывающие, что эти типы реализуются.

§ 3.1 Формулировки основных теорем

На протяжении всего параграфа мы предполагаем, что $\forall x \in \mathbb{R},\ \sigma(x) \neq 0$ и существует $a > 0$, для которого

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{loc}((0,a]). \tag{3.1}$$

Заметим, что интеграл

$$\int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\sigma^2(x)}\,dx$$

может сходиться, даже если нуль является изолированной особой точкой. В этом случае соответствующий интеграл расходится в левой полуокрестности нуля.

Будем называть решение P, определенное до момента T, *неотрицательным*, если

$$\mathsf{P}\{\forall t \leqslant T,\, X_t \geqslant 0\} = 1.$$

Нам понадобятся функции

$$\rho(x) = \exp\Big\{\int_x^a \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}\,dy\Big\}, \quad x \in (0,a], \tag{3.2}$$

$$s(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \rho(y)\,dy, & \text{если } \displaystyle\int_0^a \rho(y)\,dy < \infty, \\ \displaystyle -\int_x^a \rho(y)\,dy, & \text{если } \displaystyle\int_0^a \rho(y)\,dy = \infty \end{cases} \tag{3.3}$$

и меры

$$m = \frac{I(0<x<a)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx + \Delta_0 + \Delta_a, \tag{3.4}$$

$$m' = \frac{I(0<x<a)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx + \Delta_a, \tag{3.5}$$

$$m'' = \frac{I(0<x<a)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx, \tag{3.6}$$

где Δ_0 и Δ_a обозначают бесконечные массы, сосредоточенные в точках 0 и a, соответственно.

На протяжении всей главы $e_1, \dots, e_4$ обозначают параметры, определенные в (1.10).

Теорема 3.1. *Предположим, что*

$$\int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\sigma^2(x)}\,dx < \infty. \tag{3.7}$$

(i) *Для любого* $x \in [0,a]$ *существует единственное решение* P_x *уравнения* (1)*, определенное до* $T_{0,a}$ ($T_{0,a}$ *вводится в* (1.7)).

(ii) *Положим* $\widetilde{\mathsf{P}}_x = \mathsf{P}_x \circ \Phi_{T_{0,a}}^{-1}$ (Φ *вводится в* (2.9)). *Тогда* $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[0,a]}$ *является регулярным процессом с естественной шкалой и мерой скорости, определяемыми равенствами* (3.3) *и* (3.4). *Кроме того, для этого процесса*

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 1, \quad e_4 = 1.$$

При выполнении условий теоремы 3.1 будем говорить, что нуль имеет *правый тип 0.*

Замечание. Условие (3.7) эквивалентно следующим условиям:

$$\int_0^a \rho(x)\,dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)}\,dx < \infty. \qquad \square$$

Теорема 3.2. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)\,dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)}\,dx = \infty.$$

(i) *Для любого* $x \in [0,a]$ *существует неотрицательное решение* P_x, *определенное до* T_a (*т.е.* $\mathsf{P}_x\{\forall t \leqslant T_a,\, X_t \geqslant 0\} = 1$). *Более того, оно единственно в классе неотрицательных решений, определенных до* T_a.

(ii) *Положим* $\widetilde{\mathsf{P}}_x = \mathsf{P}_x \circ \Phi_{T_a}^{-1}$. *Тогда* $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[0,a]}$ *является регулярным процессом с естественной шкалой и мерой скорости, определяемыми равенствами* (3.3) *и* (3.5). *Кроме того, для этого процесса*

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = 1, \quad e_4 = 1.$$

При выполнении условий теоремы 3.2 будем говорить, что нуль имеет *правый тип 2.*

Теорема 3.3. *Предположим, что*
$$\int_0^a \rho(x)\,dx<\infty,\quad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx=\infty,\quad \int_0^a \frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,s(x)\,dx<\infty.$$
(i) *Для любого решения* (P,T) *имеем*
$$\mathsf{P}\bigl\{\forall t\in[T_0,T],\ X_t\leqslant 0\bigr\}=1.$$

(ii) *Для любого* $x\in[0,a]$ *существует единственное решение* P_x, *определенное до* $T_{0,a}$.

(iii) *Положим* $\widetilde{\mathsf{P}}_x=\mathsf{P}_x\circ\Phi_{T_{0,a}}^{-1}$. *Тогда* $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[0,a]}$ *является регулярным процессом с естественной шкалой и мерой скорости, определяемыми равенствами* (3.3) *и* (3.4). *Кроме того, для этого процесса*
$$e_1=0,\quad e_2=0,\quad e_3=1,\quad e_4=1.$$

При выполнении условий теоремы 3.3 будем говорить, что нуль имеет *правый тип 1.*

Замечание. Из утверждения (i) вытекает, что для любого решения (P,X) с $x\leqslant 0$ выполнено: $\mathsf{P}\bigl\{\forall t\leqslant T,\ X_t\leqslant 0\bigr\}=1$. □

Теорема 3.4. *Предположим, что*
$$\int_0^a \rho(x)\,dx<\infty,\quad \int_0^a \frac{|b(x)|\,s(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx=\infty,\quad \int_0^a \frac{s(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx<\infty.$$
(i) *Если* (P,T) *— решение с* $x>0$, *то* $T<T_0$ P*-п.н.*

(ii) *Если* (P,T) *— решение с* $x\leqslant 0$, *то* $\mathsf{P}\bigl\{\forall t\leqslant T,\ X_t\leqslant 0\bigr\}=1$.

(iii) *Для любого* $x\in(0,a)$ *существует единственное решение* P_x, *определенное до* $\overline{T}_{0,a}-$ ($\overline{T}_{0,a}$ *вводится в* (1.8)).

(iv) *Положим* $\overline{\mathsf{P}}_x=\mathsf{P}_x\circ\overline{\Phi}_{T_{0,a}}^{-1}$ ($\overline{\Phi}$ *вводится в* (2.10)). *Тогда* $(\overline{\mathsf{P}}_x)_{x\in(0,a)}$ *является регулярным процессом с естественной шкалой и мерой скорости, определяемыми равенствами* (3.3) *и* (3.6). *Определим* $\overline{\mathsf{P}}_0$ *как меру,* *сосредоточенную на* $X \equiv 0$. *Тогда* $(\overline{\mathsf{P}}_x)_{x\in[0,a)}$ *является непрерывным строго марковским процессом с*

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = 1.$$

При выполнении условий теоремы 3.4 будем говорить, что нуль имеет *правый тип 6.*

Теорема 3.5. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)\,dx < \infty, \quad \int_0^a \frac{s(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = \infty.$$

(i) *Если* (P, T) *— решение с* $x > 0$, *то* $T < T_0$ P-*п.н.*

(ii) *Если* (P, T) *— решение с* $x \leqslant 0$, *то* $\mathsf{P}\bigl\{\forall t \leqslant T,\ X_t \leqslant 0\bigr\} = 1$.

(iii) *Для любого* $x \in (0, a)$ *существует единственное решение* P_x, *определенное до* $\overline{T}_a-$. *Кроме того,* $\mathsf{P}_x\bigl\{\inf_{t<\overline{T}_a} X_t = 0\bigr\} > 0$.

(iv) *Положим* $\overline{\mathsf{P}}_x = \mathsf{P}_x \circ \overline{\Phi}_{\overline{T}_a}^{-1}$. *Тогда* $(\overline{\mathsf{P}}_x)_{x\in(0,a)}$ *является регулярным процессом с естественной шкалой и мерой скорости, определяемыми равенствами* (3.3) *и* (3.6). *Определим* $\overline{\mathsf{P}}_0$ *как меру, сосредоточенную на* $X \equiv 0$. *Тогда* $(\overline{\mathsf{P}}_x)_{x\in[0,a)}$ *является непрерывным строго марковским процессом с*

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = 0.$$

При выполнении условий теоремы 3.5 будем говорить, что нуль имеет *правый тип 4.*

Теорема 3.6. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)\,dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,|s(x)|\,dx < \infty.$$

(i) *Если* (P, T) *— решение с* $x > 0$, *то* $T < T_0$ P-*п.н.*

(ii) *Для любого* $x \in (0, a]$ *существует единственное решение* P_x, *определенное до* T_a. *Для* $x = 0$ *существует неотрицательное решение* P_0, *определенное до* T_a, *и оно единственно в классе неотрицательных решений.*

(iii) *Положим* $\widetilde{\mathsf{P}}_x = \mathsf{P}_x \circ \Phi_{T_a}^{-1}$. *Тогда* $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in(0,a]}$ *является регулярным процессом с естественной шкалой и мерой скорости, определяемыми равенствами* (3.3) *и* (3.5). *Кроме того,* $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[0,a]}$ *является непрерывным строго марковским процессом с*

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = 0.$$

При выполнении условий теоремы 3.6 будем говорить, что нуль имеет *правый тип 3.*

Теорема 3.7. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)\,dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{|b(x)\,s(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{|s(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx < \infty.$$

(i) *Если* (P, T) *— решение с* $x > 0$, *то* $T < T_0$ P-*п.н.*

(ii) *Если* (P, T) *— решение с* $x \leqslant 0$, *то* $\mathsf{P}\big\{\forall t \leqslant T,\ X_t \leqslant 0\big\} = 1$.

(iii) *Для любого* $x \in (0, a]$ *существует единственное решение* P_x, *определенное до* T_a.

(iv) *Положим* $\widetilde{\mathsf{P}}_x = \mathsf{P}_x \circ \Phi_{T_a}^{-1}$. *Тогда* $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in(0,a]}$ *является регулярным процессом с естественной шкалой и мерой скорости, определяемыми равенствами* (3.3) *и* (3.5). *Определим* $\widetilde{\mathsf{P}}_0$ *как меру, сосредоточенную на* $X \equiv 0$. *Тогда* $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[0,a]}$ *является непрерывным строго марковским процессом с*

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = 0.$$

При выполнении условий теоремы 3.7 будем говорить, что нуль имеет *правый тип 7.*

Теорема 3.8. *Предположим, что*

$$\int_0^a \rho(x)\,dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{|s(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = \infty.$$

(i) *Если* (P, T) *— решение с* $x > 0$, *то* $T < T_0$ P-*п.н.*

(ii) *Если* (P, T) *— решение с* $x \leqslant 0$, *то* $\mathsf{P}\big\{\forall t \leqslant T,\ X_t \leqslant 0\big\} = 1$.

(iii) *Для любого* $x \in (0,a]$ *существует единственное решение* P_x, *определенное до* T_a.

(iv) *Положим* $\widetilde{\mathsf{P}}_x = \mathsf{P}_x \circ \Phi_{T_a}^{-1}$. *Тогда* $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in(0,a]}$ *является регулярным процессом с естественной шкалой и мерой скорости, определяемыми равенствами* (3.3) *и* (3.5). *Определим* $\widetilde{\mathsf{P}}_0$ *как меру, сосредоточенную на* $X \equiv 0$. *Тогда* $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[0,a]}$ *является непрерывным строго марковским процессом с*

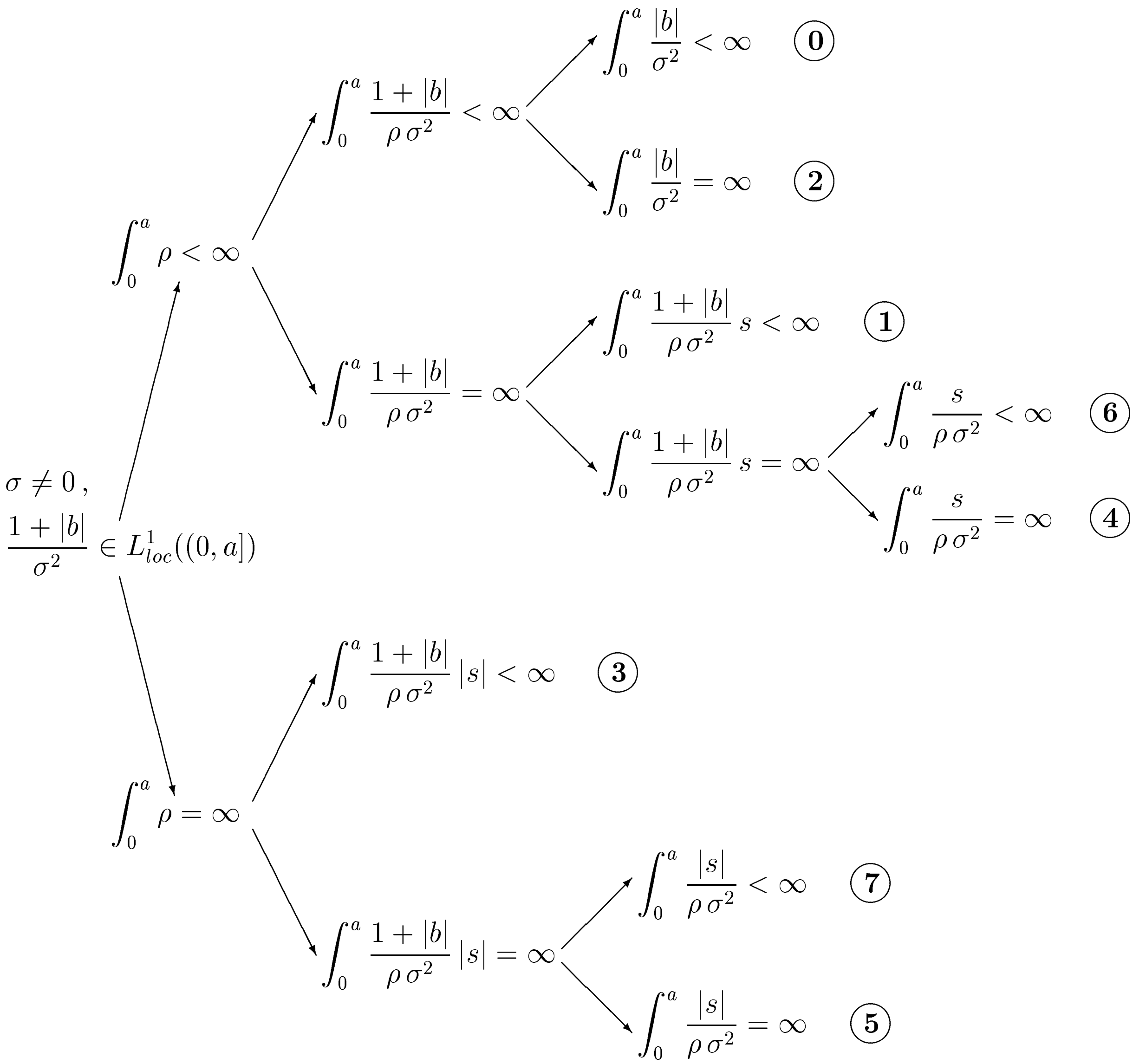
$$e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = 0.$$

При выполнении условий теоремы 3.8 будем говорить, что нуль имеет *правый тип 5.*

Замечания. (i) Для типов 0 и 1 параметры $e_1,\dots,e_4$ совпадают. Однако эти два типа совершенно различны. Именно, тип 0 может быть назван *несингулярным* типом, в то время как типы $1,\dots,7$ являются *сингулярными*. Качественное различие между типами 0 и 1 проявляется при двусторонней классификации изолированных особых точек (см. теорему 3.12).

(ii) Для типов 4 и 5 параметры $e_1,\dots,e_4$ совпадают. Однако между этими двумя типами существует качественное различие. Для типа 4 решение, выходящее из $x \in (0,a)$, с положительной вероятностью стремится к нулю при $t \to \infty$. Следовательно, оно с положительной вероятностью не достигает точки a. (Именно по этой причине решение P_x в теореме 3.5 определено до $\overline{T}_a-$, а не до T_a). С другой стороны, для типа 5 решение достигает a с вероятностью единица. $\square$

Если нуль имеет правый тип 2 или 3, то существует неотрицательное решение, выходящее из нуля. Иными словами, типы 2 и 3 могут быть названы *входными* типами. С другой стороны, типы $1,4,\dots,7$ не являются входными: для этих типов любое решение, выходящее из нуля, неположительно. Если нуль имеет правый тип 0 и является изолированной особой точкой, то любое решение, выходящее из нуля, неположительно



Тип	e_1	e_2	e_3	e_4
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	1
7	0	1	0	0

	Выход	Не выход
Вход	**2**	**3**
Не вход	**0 1**	**4 5 6 7**

Рис. 1. Классификация изолированных особых точек

(см. теорему 3.12). Итак, 0 не является входным типом.

Если нуль имеет правый тип 0, 1 или 2, то при $x \in (0,a)$ существует решение, выходящее из x и достигающее нуль с положительной вероятностью. Таким образом, типы 0, 1, 2 могут быть названы *выходными* типами. Напротив, если правый тип нуля — один из $3,\dots,7$, то любое решение с $x > 0$ не достигает нуля. Итак, типы $3,\dots,7$ не являются выходными.

Далее мы приведем примеры, показывающие, что все типы $0,\dots,7$ реализуются.

§ 3.2 Доказательства основных теорем

Лемма 3.9. *Предположим, что выполнено условие* (3.1)*. Тогда*

$$\int_0^a \frac{|b(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx < \infty \implies \int_0^a \frac{1}{\rho(x)}\,dx < \infty, \tag{3.8}$$

$$\int_0^a \frac{|b(x)\,s(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx < \infty \implies \int_0^a \frac{|s(x)|}{\rho(x)}\,dx < \infty. \tag{3.9}$$

Доказательство. Для любого $c \in (0,a]$ имеем

$$\int_c^a \frac{2b(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = -\int_c^a \frac{\rho'(x)}{\rho^2(x)}\,dx = -\int_{\rho(c)}^{\rho(a)} \frac{1}{y^2}\,dy. \tag{3.10}$$

Если интеграл в левой части (3.8) сходится, то существует такое $\theta > 0$, что

$$\forall c \in (0,a], \quad \Big|\int_{\rho(c)}^{\rho(a)} \frac{1}{y^2}\,dy\Big| < \theta,$$

и, следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что $\rho > \delta$ на $(0,a]$. Отсюда вытекает (3.8).

Для любого $c \in (0,a]$ имеем

$$\int_c^a \frac{2b(x)\,s(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = -\int_c^a \frac{s''(x)\,s(x)}{(s'(x))^2}\,dx =$$

$$= \int_c^a \Big[\Big(\frac{s(x)}{s'(x)}\Big)' - 1\Big]\,dx = \frac{s(a)}{s'(a)} - \frac{s(c)}{s'(c)} + c - a. \tag{3.11}$$

Если интеграл в левой части (3.9) сходится, то существует такое $\theta > 0$, что

$$\forall c \in (0, a], \quad \left|\frac{s(c)}{s'(c)}\right| = \frac{|s(c)|}{\rho(c)} < \theta.$$

Отсюда вытекает (3.9). $\square$

Доказательство теоремы 3.1. **(i)** *Существование.* Фиксируем $x \in [0, a]$. Пусть $(B_t)_{t \geqslant 0}$ — броуновское движение, выходящее из $s(x)$, на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathrm{Q}\big)$. Мы предполагаем, что фильтрация $(\mathcal{G}_t)$ непрерывна справа. Положим

$$\varkappa(y) = \rho(s^{-1}(y))\,\sigma(s^{-1}(y)), \quad y \in [0, \alpha], \tag{3.12}$$

$$A_t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \varkappa^{-2}(B_s)\,ds, & \text{если } t < T_{0,\alpha}(B), \\ \infty, & \text{если } t \geqslant T_{0,\alpha}(B), \end{cases} \tag{3.13}$$

где $\alpha = s(a)$, $T_{0,\alpha}(B) = T_0(B) \wedge T_\alpha(B)$. Для $0 < \gamma < \beta < \alpha$ имеем

$$\int_0^{T_{\gamma,\beta}(B)} \varkappa^{-2}(B_s)\,ds = \int_\gamma^\beta \varkappa^{-2}(y)\,L^y_{T_{\gamma,\beta}(B)}\,dy < \infty \quad \text{п.н.}$$

Таким образом, процесс A п.н. непрерывен на $[0, T_{0,\alpha}(B))$.

Рассмотрим замену времени

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\}.$$

Очевидно, процесс τ непрерывен и п.н. конечен. Согласно предложению 1.20, процесс

$$Y_t = B_{\tau_t} \tag{3.14}$$

является $(\mathcal{G}_{\tau_t}, \mathrm{Q})$-локальным мартингалом, причем $\langle Y\rangle_t = \tau_t$.

Имеем

$$\lim_{t \uparrow T_{0,\alpha}(B)} B_t = 0 \text{ или } \alpha \quad \text{п.н.}$$

Следовательно,

$$\lim_{t \uparrow A_{T_{0,\alpha}(B)-}} Y_t = 0 \text{ или } \alpha \quad \text{п.н.}$$

Итак,

$$A_{T_{0,\alpha}(B)-} = T_{0,\alpha}(Y) \quad \text{п.н.} \tag{3.15}$$

Выведем теперь другое выражение для τ_t. Предположим сначала, что $t < A_{T_{0,\alpha}(B)-}$. В силу предложения 1.23, имеем

$$\tau_t = \int_0^{\tau_t} \varkappa^2(B_s)\,\varkappa^{-2}(B_s)\,ds = \int_0^{\tau_t} \varkappa^2(B_s)\,dA_s = \int_0^t \varkappa^2(B_{\tau_s})\,ds = \int_0^t \varkappa^2(Y_s)\,ds.$$

Очевидно, процесс τ постоянен после $A_{T_{0,\alpha}(B)-}$. Учитывая (3.15), получаем

$$\langle Y\rangle_t = \tau_t = \int_0^{t\wedge T_{0,\alpha}(Y)} \varkappa^2(Y_s)\,ds.$$

Пусть $Z = s^{-1}(Y)$, где s определено в (3.3). Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\Big[\int_0^{T_{0,\alpha}(Z)} \big(1 + |b(Z_t)| + \sigma^2(Z_t)\big)\,dt\Big] = \\
&\qquad = \mathsf{E}\Big[\int_0^{T_{0,\alpha}(Y)} \big(1 + |b(s^{-1}(Y_t))| + \sigma^2(s^{-1}(Y_t))\big)\,dt\Big] = \\
&\qquad = \mathsf{E}\Big[\int_0^{T_{0,\alpha}(B)} \frac{1 + |b(s^{-1}(B_t))| + \sigma^2(s^{-1}(B_t))}{\varkappa^2(B_t)}\,dt\Big] = \\
&\qquad = \mathsf{E}\Big[\int_0^{\alpha} \frac{1 + |b(s^{-1}(y))| + \sigma^2(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\,L^y_{T_{0,\alpha}(B)}(B)\,dy\Big] \leqslant \\
&\qquad \leqslant 2\int_0^{\alpha} \frac{1 + |b(s^{-1}(y))| + \sigma^2(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\,y\,dy = \\
&\qquad = 2\int_0^{a} \frac{1 + |b(x)| + \sigma^2(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,s(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Здесь мы использовали неравенство

$$\mathsf{E}L^y_{T_{0,\alpha}(B)}(B) \leqslant \mathsf{E}L^y_{T_0(B)}(B) \leqslant 2y, \quad y \in [0,\alpha]$$

(см. предложение 1.14 (ii)). Из условий теоремы вытекает, что функция ρ отделена от нуля на $(0,a]$. Поэтому последнее выражение в (3.16) конечно.

Функция $s^{-1}(y)$ абсолютно непрерывна на $(0,\alpha)$, и при этом

$$(s^{-1})'(y) = \frac{1}{\rho(s^{-1}(y))}, \quad y \in (0,\alpha). \tag{3.17}$$

Последняя функция, в свою очередь, абсолютно непрерывна на $(0,\alpha)$ (заметим, что ρ отделена от нуля на $(0,\alpha)$), и при этом

$$(s^{-1})''(y) = \frac{2b(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}, \quad y \in (0,\alpha). \tag{3.18}$$

Более того,

$$\int_0^\alpha \frac{2|b(s^{-1}(y))|}{\varkappa^2(y)}\,dy = \int_0^a \frac{2|b(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx < \infty. \tag{3.19}$$

Следовательно, функция $s^{-1} : [0,\alpha] \to [0,a]$ удовлетворяет условиям предложения 1.9. Поэтому

$$Z_t = s^{-1}(Y_0) + \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{2b(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\,L_t^y(Y)\,dy + \int_0^t \frac{1}{\rho(s^{-1}(Y_s))}\,dY_s =$$

$$= x + \int_0^t \frac{b(s^{-1}(Y_s))}{\varkappa^2(Y_s)}\,d\langle Y\rangle_s + N_t = x + \int_0^{t\wedge T_{0,a}(Z)} b(Z_s)\,ds + N_t. \tag{3.20}$$

При этом

$$\langle N\rangle_t = \int_0^t \frac{1}{\rho^2(s^{-1}(Y_s))}\,d\langle Y\rangle_s =$$

$$= \int_0^{t\wedge T_{0,\alpha}(Y)} \sigma^2(s^{-1}(Y_s))\,ds = \int_0^{t\wedge T_{0,a}(Z)} \sigma^2(Z_s)\,ds. \tag{3.21}$$

Положим

$$\widetilde{\mathsf{P}}_x^0 = \mathrm{Law}(Z_t;\, t \geqslant 0) \tag{3.22}$$

и $\mathsf{P}_x = \widetilde{\mathsf{P}}_x^0 | \mathcal{F}_{T_{0,a}}$. Утверждается, что P_x — решение (1) до $T_{0,a}$.

Проверим свойство iii) определения 2.21. Процесс N, определенный в (3.20), является непрерывным $(\mathcal{G}_{\tau_t})$-локальным мартингалом. Поэтому для любых $m \in \mathbb{N}$, $s < t$ и $C \in \mathcal{F}_s$ (где $(\mathcal{F}_t)$ обозначает каноническую фильтрацию на $\overline{C}(\mathbb{R}_+)$) имеем

$$\mathsf{E}\big[I(Z \in C)\cdot(N_t^{S_m(N)} - N_s^{S_m(N)})\big] = 0,$$

где $S_m(N) = \inf\{t \geqslant 0 : |N_t| \geqslant m\}$. Итак, для процесса

$$M_t = X_t - \int_0^{t\wedge T_{0,a}} b(X_s)\,ds$$

выполнено равенство

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_x^0}\big[I(X\in C)\cdot (M_t^{S_m(M)} - M_s^{S_m(M)})\big] = 0.$$

Свойство iv) определения 2.21 проверяется аналогично, в то время как ii) вытекает из (3.16).

Единственность. Пусть P_x обозначает некоторое решение, определенное до $T_{0,a}$. Положим $\widetilde{\mathsf{P}}_x = \mathsf{P}_x \circ \Phi_{T_{0,a}}^{-1}$. Координатный процесс X является $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}}_x)$-семимартингалом с разложением

$$X_t = x + \int_0^{t\wedge T_{0,a}} b(X_s)\,ds + M_t,$$

где $M \in \mathcal{M}_{loc}^c(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}}_x)$ и

$$\langle M\rangle_t = \int_0^{t\wedge T_{0,a}} \sigma^2(X_s)\,ds$$

($\mathcal{M}_{loc}^c$ обозначает класс непрерывных локальных мартингалов). Положим $Y = s(X)$. Согласно формуле Ито-Танака (предложение 1.9), $Y \in \mathcal{M}_{loc}^c(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}}_x)$ и

$$\langle Y\rangle_t = \int_0^{t\wedge T_{0,\alpha}(Y)} \varkappa^2(Y_s)\,ds,$$

где $\varkappa$ определена в (3.12). Пусть

$$A_t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \varkappa^2(Y_s)\,ds, & \text{если } t < T_{0,\alpha}(Y), \\ \infty, & \text{если } t \geqslant T_{0,\alpha}(Y), \end{cases}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\}, \qquad V_t = Y_{\tau_t}.$$

Заметим, что процесс A $\widetilde{\mathsf{P}}_x$-п.н. конечен на $[0, T_{0,\alpha}(Y))$, т.к. $A = \langle Y\rangle$ на этом интервале. Из свойства ii) определения 2.21 вытекает, что $T_{0,a} < \infty$ $\widetilde{\mathsf{P}}_x$-п.н. В результате,

$$A_{T_{0,\alpha}(Y)-} = T_{0,\alpha}(V) \quad \widetilde{\mathsf{P}}_x\text{-п.н.} \tag{3.23}$$

Процесс Y является $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}}_x)$-локальным мартингалом. Следовательно, Y является локальным мартингалом также на правой модификации $(\mathcal{F}_t^+)$ фильтрации $(\mathcal{F}_t)$. Заметим, что процесс τ непрерывен. Поэтому мы можем применить предложение 1.20, которое показывает, что $V \in \mathcal{M}_{loc}^c(\mathcal{F}_{\tau_t}^+, \widetilde{\mathsf{P}}_x)$. При этом

$$\langle V \rangle_t = \langle Y \rangle_{\tau_t} = t \wedge A_{T_{0,\alpha}(Y)-} = t \wedge T_{0,\alpha}(V).$$

Существует броуновское движение B на некотором пополнении пространства $\big(\overline{C}(\mathbb{R}_+), \mathcal{F}, (\mathcal{F}_{\tau_t}^+), \widetilde{\mathsf{P}}_x\big)$ такое, что V совпадает с B, остановленным в момент $T_{0,\alpha}(B) = T_{0,\alpha}(V)$. Имеем

$$Y_t = \begin{cases} B_{A_t}, & \text{если } t < T_{0,\alpha}(B), \\ B_{T_{0,\alpha}(B)}, & \text{если } t \geqslant T_{0,\alpha}(B), \end{cases}$$

$$A_t = \inf\{s \geqslant 0 : \tau_s > t\}.$$

При этом для $t < T_{0,\alpha}(B)$

$$\tau_t = \int_0^{\tau_t} \varkappa^{-2}(Y_s)\, dA_s = \int_0^t \varkappa^{-2}(Y_{\tau_s})\, ds = \int_0^t \varkappa^{-2}(B_s)\, ds,$$

и процесс τ постоянен после $T_{0,\alpha}(B)$. Из этих рассуждений вытекает, что мера

$$\mathsf{Q} = \mathrm{Law}(Y_t;\, t \geqslant 0 \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}_x)$$

одинакова для всех решений P_x, определенных до $T_{0,a}$. С другой стороны, $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ является образом Q при отображении $X \mapsto s^{-1}(X)$, а по лемме 2.18, $\mathsf{P}_x = \widetilde{\mathsf{P}}_x | \mathcal{F}_{T_{0,a}}$. Это завершает доказательство единственности.

(ii) Процесс A, определенный в (3.13), может быть представлен в следующем виде:

$$A_t = \int_0^\alpha L_t^y(B)\, \nu(dy),$$

где

$$\nu = \varkappa^{-2}(y)\, dy + \Delta_0 + \Delta_\alpha$$

(Δ_0 и Δ_α обозначают бесконечные массы, сосредоточенные в точках 0 и α, соответственно). Обозначим через $\mathsf{Q}_{s(x)}$ распределение процесса Y, определенного в (3.14). Согласно предложению 1.35 (i), $(\mathsf{Q}_y)_{y\in[0,\alpha]}$ — регулярный процесс с естественной шкалой x и мерой скорости ν. Пусть $\widetilde{\mathsf{P}}_x^0$ обозначает меру, определяемую равенством (3.22). Из предложения 1.36 вытекает, что $(\widetilde{\mathsf{P}}_x^0)_{x\in[0,a]}$ является регулярным процессом с естественной шкалой s, определенной в (3.3), и мерой скорости $\nu\circ s^{-1}$. Очевидно, $\nu\circ s^{-1}$ совпадает с мерой, определенной в (3.4).

Для завершения доказательства первого утверждения достаточно заметить, что мера $\widetilde{\mathsf{P}}_x$, определенная как $\mathsf{P}_x\circ\Phi_{T_{0,a}}^{-1}$, совпадает с мерой $\widetilde{\mathsf{P}}_x^0$. Это вытекает из равенства

$$\mathsf{P}_x\circ\Phi_{T_{0,a}}^{-1}=\left(\widetilde{\mathsf{P}}_x^0|\mathcal{F}_{T_{0,a}}\right)\circ\Phi_{T_{0,a}}^{-1}=\widetilde{\mathsf{P}}_x^0\circ\Phi_{T_{0,a}}^{-1}$$

и того свойства, что $X^{T_{0,a}}=X$ $\widetilde{\mathsf{P}}_x^0$-п.н.

Второе утверждение является следствием леммы 1.38. □

Доказательство теоремы 2.9. Поскольку d — неособая точка, существуют постоянные $d_1<d<d_2$ такие, что

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2}\in L_{loc}^1([d_1,d_2]).$$

Мы будем использовать обозначения из доказательства теоремы 3.1 (i). Без ограничения общности можно считать, что $d_1=0$, $d_2=a$.

Предположим сначала, что $x=d$. Мера $P_x=\mathsf{P}|\mathcal{F}_{T_{0,a}}$ является решением уравнения (1) до $T_{0,a}$. По теореме 3.1, эта мера единственна и

$$\mathsf{P}_x=\mathrm{Law}(Z_t;\,t\geqslant 0)=\mathrm{Law}(s(Y_t);\,t\geqslant 0),$$

где процесс Y определен в (3.14).

Согласно формуле Ито-Танака и предложению 1.21,

$$\begin{aligned}(Y_t - s(x))^+ = (B_{\tau_t} - s(x))^+ = \\ &= \int_0^{\tau_t} I(B_s > s(x))\, dB_s + \frac{1}{2} L_{\tau_t}^{s(x)}(B) = \\ &= \int_0^t I(B_{\tau_s} > s(x))\, dB_{\tau_s} + \frac{1}{2} L_{\tau_t}^{s(x)}(B) = \\ &\qquad = \int_0^t I(Y_s > s(x))\, dY_s + \frac{1}{2} L_{\tau_t}^{s(x)}(B).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(Y_t - s(x))^+ = \int_0^t I(Y_s > s(x))\, dY_s + \frac{1}{2} L_t^{s(x)}(Y)$$

и, следовательно, $L_t^{s(x)}(Y) = L_{\tau_t}^{s(x)}(B)$.

Применяя еще раз формулу Ито-Танака, получаем

$$Z_t \vee x = s^{-1}(Y_t \vee s(x)) = x + \int_0^t I(Z_s > x)\, dZ_s + \frac{1}{2\rho(x)}\, L_t^{s(x)}(Y).$$

Учитывая равенство

$$Z_t \vee x = x + \int_0^t I(Z_s > x)\, dZ_s + \frac{1}{2} L_t^x(Z),$$

приходим к выражению

$$L_t^x(Z) = \frac{1}{\rho(x)} L_t^{s(x)}(Y) = \frac{1}{\rho(x)} L_{\tau_t}^{s(x)}(B).$$

Для любого $t > 0$ имеем $\tau_t > 0$ п.н. Из предложения 1.13 вытекает, что для любого $t > 0$ выполнено $L_t^x(X) > 0$ P-п.н. (т.к. мы предполагаем, что $x = d$). Остается заметить, что $L_t^x(X) = L_t^{x-}(X)$ P-п.н. (см. (2.5)).

Пусть теперь $x \neq d$. Рассмотрим условную меру $\mathsf{P}' = \mathsf{P}(\,\cdot\,|\, T_d < \infty)$ и положим $\mathsf{R} = \mathsf{P}' \circ \Theta_{T_d}^{-1}$, где Θ_T определено в (1.9). Утверждается, что R является решением (1), выходящим из d. Чтобы это доказать, выберем $0 \leqslant s < t$, $C \in \mathcal{F}_s$, $m \in \mathbb{N}$ и проверим выполнение равенства

$$\mathsf{E}_\mathsf{P}\Big[\Big(\big\{(M_t^{S_m(M)} - M_s^{S_m(M)})\, I(C)\big\} \circ \Theta_{T_d}\Big) \cdot I(T_d < \infty)\Big] = 0, \tag{3.24}$$

где процесс M определен в (1.1), а $S_m(M) = \inf\{t \geqslant 0 : |M_t| \geqslant m\}$. Из леммы 2.16 вытекает, что $\Theta_{T_d}^{-1}(C) \in \mathcal{F}_{T_d+s}$. Поэтому (3.24) является следствием мартингального свойства для $M^{S_m(M)}$ (заметим, что процесс $M^{S_m(M)}$ ограничен). Те же рассуждения можно применить и к процессу, определенному в (1.2).

Итак, R является решением (1), выходящим из d. Согласно доказанному выше (для случая $x = d$), имеем: $L_t^d \circ \Theta_{T_d}(X) > 0$ P-п.н. на множестве $\{T_d < \infty\}$. Кроме того,

$$L_{t+T_d}^d(X) = L_{T_d}^d(X) + L_t^d \circ \Theta_{T_d}(X) = L_t^d \circ \Theta_{T_d}(X) \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

на множестве $\{T_d < \infty\}$ (см. [34; ch. X, (1.2)]). Это завершает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. **(i)** *Существование.* Зафиксируем $x \in [0, a]$. Пусть B — броуновское движение, выходящее из $s(x)$, на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathsf{Q}\big)$. Положим

$$\varkappa(y) = \begin{cases} \rho(s^{-1}(y))\,\sigma(s^{-1}(y)), & \text{если } y \in (0, \alpha], \\ 1, & \text{если } y = 0, \end{cases} \tag{3.25}$$

$$A_t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \varkappa^{-2}(|B_s|)\,ds, & \text{если } t < T_\alpha(|B|), \\ \infty, & \text{если } t \geqslant T_\alpha(|B|), \end{cases}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\}, \qquad Y_t = |B_{\tau_t}|, \tag{3.26}$$

где $\alpha = s(a)$. Так же, как и в доказательстве теоремы 3.1 (i), можно показать, что

$$\tau_t = \int_0^{t \wedge T_\alpha(Y)} \varkappa^2(Y_s)\,ds. \tag{3.27}$$

Согласно формуле Ито-Танака, существует $(\mathcal{G}_t)$-броуновское движение W, для которого

$$|B_t| = s(x) + W_t + L_t^0(B) = s(x) + W_t + \frac{1}{2} L_t^0(|B|).$$

Из предложения 1.20 вытекает, что процесс $K_t = W_{\tau_t}$ является непрерывным $(\mathcal{G}_{\tau_t})$-локальным мартингалом.

Процесс $L^0(|B|)$ непрерывен и $(\mathcal{G}_t)$-согласован. Следовательно, он является $(\mathcal{G}_t)$-прогрессивно измеримым. В силу предложения 1.17, процесс $L^0_{\tau_t}(|B|)$ $(\mathcal{G}_{\tau_t})$-прогрессивно измерим. Очевидно, он также непрерывен. Итак, процесс Y является непрерывным $(\mathcal{G}_{\tau_t})$-семимартингалом. Используя предложения 1.9, 1.21 и 1.22, мы можем написать

$$Y_t = Y_t^+ = Y_0^+ + \int_0^t I(Y_s > 0)\, dY_s + \frac{1}{2} L_t^0(Y) =$$
$$= Y_0 + \int_0^t I(|B_{\tau_s}| > 0)\, dW_{\tau_s} + \frac{1}{2}\int_0^t I(|B_{\tau_s}| > 0)\, dL^0_{\tau_s}(|B|) + \frac{1}{2} L_t^0(Y) =$$
$$= Y_0 + \int_0^{\tau_t} I(|B_s| > 0)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^{\tau_t} I(|B_s| > 0)\, dL^0_s(|B|) + \frac{1}{2} L_t^0(Y). \quad (3.28)$$

Учитывая равенство

$$\int_0^t I(B_s = 0)\, ds = 0 \quad \text{п.н.}$$

и применяя предложение 1.11, получаем

$$Y_t = Y_0 + W_{\tau_t} + \frac{1}{2} L_t^0(Y) = Y_0 + K_t + \frac{1}{2} L_t^0(Y). \quad (3.29)$$

При этом, с учетом (3.27), имеем

$$\langle K \rangle_t = \int_0^{t \wedge T_\alpha(Y)} \varkappa^2(Y_s)\, ds.$$

Положим $Z = s^{-1}(Y)$. Аналогично (3.16), проверяем, что

$$\mathsf{E}\Big[\int_0^{T_a(Z)} \big(1 + |b(Z_t)| + \sigma^2(Z_t)\big)\, dt\Big] =$$
$$= \mathsf{E}\Big[\int_0^{\alpha} \frac{1 + |b(s^{-1}(y))| + \sigma^2(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\, L^y_{T_\alpha(|B|)}(|B|)\, dy\Big]. \quad (3.30)$$

В силу равенства

$$L^y_{T_\alpha(|B|)}(|B|) = L^y_{T_{\alpha,-\alpha}(B)}(|B|) = L^y_{T_{\alpha,-\alpha}(B)}(B) + L^{-y}_{T_{\alpha,-\alpha}(B)}(B),$$

последнее выражение в (3.30) может быть переписано в следующем виде:

$$\mathsf{E}\Big[\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1+|b(s^{-1}(|y|))|+\sigma^2(s^{-1}(|y|))}{\varkappa^2(|y|)}\,L^y_{T_{\alpha,-\alpha}(B)}(B)\,dy\Big]\leqslant$$

$$\leqslant 4\alpha\int_0^{\alpha}\frac{1+|b(s^{-1}(y))|+\sigma^2(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\,dy=$$

$$=4\alpha\int_0^{a}\frac{1+|b(x)|+\sigma^2(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx. \quad (3.31)$$

С учетом леммы 3.9, это выражение конечно.

Равенства (3.17)–(3.19) по-прежнему справедливы. Поэтому существует предел

$$(s^{-1})'_+(0)=\lim_{y\downarrow 0}(s^{-1})'(y)=\lim_{y\downarrow 0}\frac{1}{\rho(s^{-1}(y))}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{1}{\rho(x)}.$$

Сравнивая условия

$$\int_0^a\frac{1+|b(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx<\infty,\quad \int_0^a\frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)}\,dx=\infty,$$

заключаем, что $(s^{-1})'_+(0)=0$. Используя предложения 1.9–1.11, мы можем написать

$$Z_t=s^{-1}(Y_t)=s^{-1}(Y_0)+\int_0^t\frac{I(Y_s>0)}{\rho(s^{-1}(Y_s))}\,dK_s+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{I(Y_s>0)}{\rho(s^{-1}(Y_s))}\,dL^0_s(Y)+\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\frac{2b(s^{-1}(Y_s))}{\varkappa^2(Y_s)}\,L^y_t(Y)\,dy=$$

$$=x+\int_0^t\frac{I(Y_s>0)}{\rho(s^{-1}(Y_s))}\,dK_s+\int_0^t\frac{b(Z_s)}{\varkappa^2(Y_s)}\,d\langle Y\rangle_s=$$

$$=x+N_t+\int_0^{t\wedge T_\alpha(Y)}b(Z_s)\,ds=x+N_t+\int_0^{t\wedge T_a(Z)}b(Z_s)\,ds.$$

При этом

$$\langle N\rangle_t=\int_0^{t\wedge T_\alpha(Y)}\frac{I(Y_s>0)}{\rho^2(s^{-1}(Y_s))}\,\varkappa^2(Y_s)\,ds=\int_0^{t\wedge T_a(Z)}I(Z_s>0)\,\sigma^2(Z_s)\,ds.$$

Далее,

$$\int_0^{t\wedge T_a(Z)} I(Z_s=0)\,\sigma^2(Z_s)\,ds = \sigma^2(0)\int_0^{t\wedge T_\alpha(Y)} I(Y_s=0)\,\varkappa^2(Y_s)\,ds =$$

$$= \sigma^2(0)\int_0^{t\wedge T_\alpha(Y)} I(Y_s=0)\,d\langle Y\rangle_s = \sigma^2(0)\int_{\mathbb{R}} I(y=0)\,L^y_{t\wedge T_\alpha(Y)}(Y)\,dy = 0.$$

(Здесь мы использовали равенство $\varkappa^2(0)=1$). Итак,

$$\langle N\rangle_t = \int_0^{t\wedge T_a(Z)} \sigma^2(Z_s)\,ds.$$

Пусть

$$\widetilde{\mathsf{P}}^0_x = \mathrm{Law}(Z_t;\, t\geqslant 0)$$

и $\mathsf{P}_x = \widetilde{\mathsf{P}}^0_x|\mathcal{F}_{T_a}$. Тогда P_x является решением, определенным до T_a. Свойство ii) определения 2.21 следует из (3.30) и (3.31), в то время как свойства iii) и iv) проверяются так же, как и в предыдущем доказательстве.

Единственность. Пусть P_x обозначает некоторое неотрицательное решение, определенное до T_a. Положим $\widetilde{\mathsf{P}}_x = \mathsf{P}_x\circ\Phi^{-1}_{T_a}$. Выберем $\delta\in(0,a)$ и положим $\Delta = s(\delta)$, $Y = s(X)\vee\Delta$. Используя тот же метод, что и в (3.28), заключаем, что

$$Y_t = Y_0 + N_t + \frac{1}{2}L^\Delta_t(Y),$$

где $N\in\mathcal{M}^c_{loc}(\mathcal{F}_t,\widetilde{\mathsf{P}}_x)$ и

$$\langle N\rangle_t = \int_0^{t\wedge T_\alpha(Y)} \varkappa^2(Y_s)\,I(Y_s>\Delta)\,ds.$$

Пусть

$$D_t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t I(Y_s>0)\,ds, & \text{если } t<T_\alpha(Y),\\ \infty, & \text{если } t\geqslant T_\alpha(Y),\end{cases}$$

$$\varphi_t = \inf\{s\geqslant 0: D_s>t\},$$
$$U_t = Y_{\varphi_t} = U_0 + N_{\varphi_t} + \frac{1}{2}L^\Delta_{\varphi_t}(Y).$$

Поскольку P_x определено до T_a, имеем $T_\alpha(Y) < \infty$ $\widetilde{\mathsf{P}}_x$-п.н. Согласно предложениям 1.19 и 1.20, процесс $K_t = N_{\varphi_t}$ является $(\mathcal{F}^+_{\varphi_t}, \widetilde{\mathsf{P}}_x)$-локальным мартингалом ($(\mathcal{F}^+_t)$ обозначает правую модификацию фильтрации $(\mathcal{F}_t)$). Для $t < D_{T_\alpha(Y)-}$ мы можем написать

$$\langle K\rangle_t = \langle N\rangle_{\varphi_t} = \int_0^{\varphi_t} \varkappa^2(Y_s)\, I(Y_s > \Delta)\, ds = \int_0^{\varphi_t} \varkappa^2(Y_s)\, dD_s = \int_0^t \varkappa^2(U_s)\, ds.$$

Процессы K и $\langle K\rangle$ постоянны после $D_{T_\alpha(Y)-}$. Кроме того,

$$D_{T_\alpha(Y)-} \leqslant T_\alpha(Y) < \infty \quad \widetilde{\mathsf{P}}_x\text{-п.н.}$$

Следовательно,

$$D_{T_\alpha(Y)-} = T_\alpha(U) \quad \widetilde{\mathsf{P}}_x\text{-п.н.}$$

Итак,

$$\langle K\rangle_t = \int_0^{t\wedge T_\alpha(U)} \varkappa^2(U_s)\, ds.$$

Рассуждая так же, как и выше, получаем

$$U_t = U_0 + K_t + \frac{1}{2} L_t^\Delta(U).$$

Пусть

$$A_t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \varkappa^2(U_s)\, ds, & \text{если } t < T_\alpha(U), \\ \infty, & \text{если } t \geqslant T_\alpha(U), \end{cases}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},$$
$$V_t = U_{\tau_t} = V_0 + K_{\tau_t} + \frac{1}{2} L^\Delta_{\tau_t}(U).$$

Тогда

$$A_{T_\alpha(U)-} = T_\alpha(V) \quad \widetilde{\mathsf{P}}_x\text{-п.н.}$$

Процесс $M_t = K_{\tau_t}$ является $(\mathcal{G}_{\tau_t}, \widetilde{\mathsf{P}}_x)$-локальным мартингалом ($G_t = \mathcal{F}^+_{\varphi_t}$), для которого

$$\langle M\rangle_t = t \wedge T_\alpha(V).$$

Далее,

$$V_t - V_0 = M_t + \frac{1}{2} L_t^{\Delta}(V).$$

Существует броуновское движение W такое, что M совпадает с W, остановленным в момент $T_\alpha(V)$. Из предложений 1.24 и 1.25 следует, что процесс $V_t - V_0$ является модулем одномерного броуновского движения, остановленным в момент первого достижения уровня $\alpha - V_0$. Так же, как и в доказательстве теоремы 3.1, мы заключаем , что мера

$$\mathsf{Q}^\delta = \operatorname{Law}(U_t;\, t \geqslant 0 \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}_x)$$

одинакова для всех возможных решений P_x, определенных до T_a. (Индекс δ показывает, что U зависит от δ).

Имеем

$$\int_0^{t\wedge T_a} I(X_s = 0)\, ds = \int_0^{t\wedge T_a} \frac{I(X_s = 0)}{\sigma^2(X_s)}\, d\langle X\rangle_s =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{I(x = 0)}{\sigma^2(0)}\, L^x_{t\wedge T_a}(X)\, dx = 0 \quad \widetilde{\mathsf{P}}_x\text{-п.н.} \quad (3.32)$$

Отсюда и из неотрицательности P_x получаем, что $\mathsf{Q}^\delta \xrightarrow[\delta\downarrow 0]{w} \mathsf{Q}$, где

$$\mathsf{Q} = \operatorname{Law}\bigl(s(X_t);\, t \geqslant 0 \,\bigl|\, \widetilde{\mathsf{P}}_x\bigr).$$

Мера $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ (а следовательно, и P_x) однозначно определяется по Q. Это завершает доказательство единственности.

(ii) Обозначим через B броуновское движение, выходящее из $s(x)$. Положим

$$\varphi_t = \inf\Bigl\{s \geqslant 0 : \int_0^s I(B_r > 0)\, dr > t\Bigr\},$$
$$V_t = B_{\varphi_t}.$$

Хорошо известно (см., например, [10; § 2.11]), что

$$\operatorname{Law}(V_t;\, t \geqslant 0) = \operatorname{Law}(|B_t|;\, t \geqslant 0).$$

Пусть

$$A'_t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \varkappa^{-2}(V_s), & \text{если } \ t < T_\alpha(V), \\ \infty, & \text{если } \ t \geqslant T_\alpha(V), \end{cases}$$

$$\tau'_t = \inf\{s \geqslant 0 : A'_s > t\}, \qquad Y'_t = V_{\tau'_t}.$$

Тогда Y' совпадает по распределению с процессом Y, определенным в (3.26). С другой стороны, $Y'_t = B_{\psi_t}$, где

$$\psi_t = \inf\Big\{s \geqslant 0 : \int_0^\alpha L^y_s(B)\,\nu(dy) > t\Big\},$$

$$\nu = I(0 < y < \alpha)\,\varkappa^{-2}(y)\,dy + \Delta_\alpha.$$

Доказательство завершается так же, как и в теореме 3.1. □

Доказательство теоремы 3.3. **(i)** Предположим, что (P, T) — такое решение, что

$$\mathsf{P}\big\{\sup\nolimits_{t\in[T_0,T]} X_t > c\big\} > 0 \tag{3.33}$$

для некоторого $c > 0$. Можно сразу считать, что $c \leqslant a$ и $T \leqslant T_c$ (иначе выберем меньшее c и рассмотрим $T \wedge T_c$ вместо T).

Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_T^{-1}$ и

$$X'_t = \int_0^t I(s \geqslant T_0)\,dX_s.$$

Выберем $\delta \in (0, c)$ и положим $\Delta = s(\delta)$, $Y = s(\delta \vee X')$. Аналогично равенствам (3.28) и (3.29), получаем

$$Y_t = \Delta + N_t + \frac{1}{2} L^\Delta_t(Y),$$

где $N \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$, и

$$\langle N\rangle_t = \int_0^t I(T_0 \leqslant s \leqslant T)\,I(Y_s > \Delta)\,\varkappa^2(Y_s)\,ds$$

($\varkappa$ определено в (3.12)).

Выберем теперь такое t_0, что

$$\widetilde{\mathsf{P}}\big\{\sup\nolimits_{t\in[T_0,T\wedge t_0]} X_t > c\big\} = \theta > 0, \tag{3.34}$$

и положим

$$A_t = \begin{cases} \langle N \rangle_t, & \text{если } t < T \wedge t_0, \\ \infty, & \text{если } t \geqslant T \wedge t_0, \end{cases}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},$$

$$U_t = Y_{\tau_t} = \Delta + N_{\tau_t} + \frac{1}{2} L^{\Delta}_{\tau_t}(Y),$$

$$\eta = A_{(T \wedge t_0)-}.$$

Из предложения 1.19 вытекает, что процесс N τ-непрерывен. Кроме того, τ ограничено ($\tau \leqslant t_0$). В силу предложения 1.20, процесс $V_t = N_{\tau_t}$ является $(\mathcal{F}^+_{\tau_t}, \widetilde{\mathsf{P}})$-локальным мартингалом с $\langle V \rangle_t = t \wedge \eta$. Аналогично (3.28), проверяем, что

$$U_t = \Delta + V_t + \frac{1}{2} L^{\Delta}_t(U).$$

Предложения 1.24 и 1.25 показывают, что $U - \Delta$ является модулем стандартного одномерного броуновского движения, остановленным в момент η (заметим, что η — $(\mathcal{F}^+_{\tau_t})$-момент остановки). Согласно (3.34),

$$\widetilde{\mathsf{P}}\{\eta > T_\gamma(U)\} = \theta > 0, \tag{3.35}$$

где $\gamma = s(c)$. При этом θ не зависит от δ.

Пусть

$$g(y) = \frac{1 + |b(s^{-1}(y))|}{\varkappa^2(y)} \, I(0 < y < \gamma).$$

Из условий теоремы вытекает, что

$$\forall \varepsilon > 0, \ \int_0^{\varepsilon} g(y)\, dy = \int_0^{s^{-1}(\varepsilon)} \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\, \sigma^2(x)}\, dx = \infty.$$

Сопоставляя это свойство с предложениями 1.12 (ii) и 1.13, получаем

$$\int_0^{T_\gamma(\Delta + |B|)} g(\Delta + |B_s|)\, ds = \int_0^{T_{\gamma-\Delta}(|B|)} g(\Delta + |B_s|)\, ds =$$

$$= \int_0^{\gamma - \Delta} L^y_{T_{\gamma-\Delta}(|B|)}(|B|)\, g(\Delta + y)\, dy \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{\gamma - \Delta} L^y_{T_{\gamma-\Delta}(|B|)}(B)\, g(\Delta + y)\, dy \xrightarrow[\Delta \downarrow 0]{\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п.н.}} \infty,$$

где B — броуновское движение, выходящее из нуля. Следовательно, для любого $\lambda > 0$ существует $\Delta \in (0,\gamma)$ такое, что

$$\widetilde{\mathsf{P}}\Big\{\int_0^{T_\gamma(\Delta+|B|)} g(\Delta+|B_s|)\,ds > \lambda\Big\} > 1-\theta/2. \tag{3.36}$$

С другой стороны, при каждом $\Delta \in (0,\gamma)$ выполнено

$$\int_0^\eta g(U_s)\,ds = \int_0^{A_{(T\wedge t_0)-}} \frac{1+|b(s^{-1}(U_s))|}{\varkappa^2(U_s)}\,ds =$$

$$= \int_0^{(T\wedge t_0)-} \frac{1+|b(s^{-1}(Y_s))|}{\varkappa^2(Y_s)}\,dA_s =$$

$$= \int_0^T I(T_0 \leqslant s \leqslant t_0)\,I(X_s > \delta)\,(1+|b(X_s)|)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T (1+|b(X_s)|)\,ds < \infty \quad \widetilde{\mathsf{P}}\text{-п.н.}$$

Это приводит к противоречию с (3.35) и (3.36), поскольку константа λ может быть выбрана сколь угодно большой.

Утверждения **(ii)** и **(iii)** доказываются аналогично теореме 3.1. $\square$

Доказательство теоремы 3.4. **(i)** Пусть (P,T) — некоторое решение с $x > 0$. Предположим, что $\mathsf{P}\{T \geqslant T_0\} > 0$. Пусть $S = T \wedge T_0$, $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P}\circ\Phi_S^{-1}$. Выберем $\delta \in (0, x\wedge a)$ и положим $\Delta = s(\delta)$. Рассмотрим процесс $Y = 0 \vee s(X) \wedge \Delta$. Учитывая, что $S \leqslant T_0$, имеем: $L_t^0(X) = 0$ $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н. Поэтому для Y выполнено равенство

$$Y_t = \Delta + N_t - \frac{1}{2}L_t^\Delta(Y),$$

где $N \in \mathcal{M}_{loc}^c(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$ и

$$\langle N\rangle_t = \int_0^{t\wedge S} I(Y_s < \Delta)\,\varkappa^2(Y_s)\,ds$$

($\varkappa$ определено в (3.25)). Выберем такое t_0, что

$$\widetilde{\mathsf{P}}\big\{\inf\nolimits_{t\leqslant S\wedge t_0} X_t = 0\big\} > 0. \tag{3.37}$$

Пусть

$$A_t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t I(Y_s < \Delta)\, \varkappa^2(Y_s)\, ds, & \text{если } \ t < S \wedge t_0, \\ \infty, & \text{если } \ t \geqslant S \wedge t_0, \end{cases}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\},$$

$$U_t = Y_{\tau_t} = \Delta + N_{\tau_t} - \frac{1}{2} L^{\Delta}_{\tau_t}(Y),$$

$$\eta = A_{(S \wedge t_0)-}.$$

Тогда

$$U_t - \Delta = V_t - \frac{1}{2} L^{\Delta}_t(U).$$

Процесс $V_t = N_{\tau_t}$ является стандартным одномерным броуновским движением, остановленным в момент η. Согласно предложениям 1.24 и 1.25, процесс $\Delta - U$ является модулем броуновского движения, остановленным в момент η.

Пусть

$$g(y) = \frac{1 + |b(s^{-1}(y))|}{\varkappa^2(y)}\, I(0 < y < \Delta). \tag{3.38}$$

Из условий теоремы вытекает, что

$$\forall \varepsilon > 0, \ \int_0^{\varepsilon} y\, g(y)\, dy = \int_0^{s^{-1}(\varepsilon)} \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x)\, \sigma^2(x)}\, s(x)\, dx = \infty. \tag{3.39}$$

Применяя предложения 1.27 и 1.28, получаем

$$\int_0^{T_0(\Delta - |B|)} g(\Delta - |B_s|)\, ds = \infty \quad \text{п.н.},$$

где B — броуновское движение, выходящее из нуля. Следовательно, $\int_0^{\eta} g(U_s)\, ds$ $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н. бесконечен на множестве

$$\bigl\{\eta \geqslant T_0(U)\bigr\} = \bigl\{\inf\nolimits_{t \geqslant 0} U_t = 0\bigr\} = \bigl\{\inf\nolimits_{t \leqslant S \wedge t_0} X_t = 0\bigr\}.$$

С учетом (3.37), это множество имеет положительную $\widetilde{\mathsf{P}}$-меру. С другой стороны,

$$\int_0^{\eta} g(U_s)\,ds = \int_0^{A_{(S\wedge t_0)-}} \frac{1+|b(s^{-1}(U_s))|}{\varkappa^2(U_s)}\,ds =$$

$$= \int_0^{(S\wedge t_0)-} \frac{1+|b(s^{-1}(Y_s))|}{\varkappa^2(Y_s)}\,dA_s =$$

$$= \int_0^T I(s \leqslant S\wedge t_0)\, I(X_s<\delta)\,(1+|b(X_s)|)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T (1+|b(X_s)|)\,ds < \infty \quad \widetilde{\mathsf{P}}\text{-п.н.}$$

Тем самым, мы приходим к противоречию.

(ii) Утверждение доказывается аналогично теореме 3.3 (i).

(iii) *Существование.* Определим процесс Y так же, как и в доказательстве теоремы 3.1 (см. (3.14)), и положим

$$Z = s^{-1}(Y), \qquad \widetilde{\mathsf{P}}^0_x = \mathrm{Law}(Z_t;\, t \geqslant 0), \qquad \mathsf{P}_x = \widetilde{\mathsf{P}}^0_x | \mathcal{F}_{T_{0,a}-}.$$

Моменты остановки $T^n = T_{1/n,a-1/n}$ образуют P_x-предвещающую последовательность для $\overline{T}_{0,a}$ (см. замечание (iii) после определения 2.22). Те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 3.1 (i), показывают, что $\mathsf{P}_x|\mathcal{F}_{T^n}$ — решение до T^n. Следовательно, P_x является решением до $\overline{T}_{0,a}-$.

Единственность. Пусть P'_x — другое решение, определенное до $\overline{T}_{0,a}-$. Положим $T^n = T_{1/n,a-1/n}$. Из теоремы 3.1 (i) вытекает, что $\mathsf{P}_x|\mathcal{F}_{T^n} = \mathsf{P}'_x|\mathcal{F}_{T^n}$. Применение леммы 2.20 завершает доказательство единственности.

(iv) Утверждение доказывается аналогично теореме 3.1 (ii). □

Доказательство теоремы 3.5. **(i)** Доказательство проводится так же, как в теореме 3.4 (i).

(ii) Доказательство проводится так же, как в теореме 3.3 (i).

(iii) *Существование.* Определим процесс Y таким же образом, как и в доказательстве теоремы 3.1 (i). Равенство (3.15) сохраняет силу. Применяя предложения 1.27 и 1.28, заключаем, что $A_{T_{0,\alpha}(B)-}$ п.н. бесконечно на множестве $\{T_0(B) < T_\alpha(B)\}$. Следовательно, $T_0(Y) = \infty$ п.н. и (3.15) может быть переписано в следующем виде:

$$A_{T_{0,\alpha}(B)-} = T_\alpha(Y) \quad \text{п.н.}$$

Пусть $Z = s^{-1}(Y)$. Равенства, аналогичные (3.16), показывают, что

$$\int_0^{T_{1/n,a-1/n}(Z)} \bigl(1 + |b(Z_s)| + \sigma^2(Z_s)\bigr)\, ds < \infty \quad \text{п.н.}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Определим $\widetilde{\mathsf{P}}_x^0$ таким же образом, как и в (3.22), и положим $\mathsf{P} = \widetilde{\mathsf{P}}_x^0|\mathcal{F}_{\overline{T}_a-}$. Рассуждая так же, как и выше (см. теорему 3.4 (iii)), получаем, что P_x является решением, определенным до $\overline{T}_a-$.

Единственность решения проверяется так же, как в теореме 3.4 (iii).

(iv) Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 (ii). $\square$

Доказательство теоремы 3.6. **(i)** Пусть (P, T) — решение с $x > 0$. Предположим, что $\mathsf{P}\{T_0 \leqslant T\} > 0$. Существует $d \in (0, a)$ такое, что

$$\mathsf{P}\Bigl\{T_0 \leqslant T \ \text{ и } \sup_{t \in [T_d, T_0]} X_t \leqslant a\Bigr\} = \theta > 0. \tag{3.40}$$

Выберем $\delta \in (0, d)$ и положим

$$X'_t = d + \int_0^t I(s > T_d)\, dX_s,$$
$$Y_t = s\bigl(X'_{t \wedge T_{\delta,a}(X')}\bigr).$$

Тогда Y — $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$-локальный мартингал, где $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_T^{-1}$. Кроме того, Y ограничен, и поэтому существует предел $Y_\infty = \lim_{t\to\infty} Y_t$. При этом

$$s(d) = Y_0 = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} Y_\infty =$$
$$= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\bigl[Y_\infty\, I\bigl(T_{s(\delta)}(Y) = \infty\bigr)\bigr] + \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\bigl[Y_\infty\, I\bigl(T_{s(\delta)}(Y) < \infty\bigr)\bigr] \leqslant \theta\, s(\delta),$$

где θ определяется в (3.40) (в последнем неравенстве мы учли, что $Y \leqslant 0$). Но $s(\delta) \underset{\delta\downarrow 0}{\longrightarrow} -\infty$, что приводит к противоречию.

(ii) *Существование.* Докажем сначала существование решения, выходящего из точки $x \in (0, a]$. Пусть

$$A_t = \begin{cases} \int_0^t \varkappa^{-2}(B_s)\,ds, & \text{если } t < T_0(B), \\ \infty, & \text{если } t \geqslant T_0(B), \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\}, \qquad Y_t = B_{\tau_t}, \tag{3.42}$$

где B — броуновское движение, выходящее из $s(x)$, а $\varkappa$ определено в (3.12). Заметим, что $s(x) \leqslant s(a) = 0$. Имеем

$$A_{T_0(B)-} = T_0(Y) \quad \text{п.н.}$$

Для $Z = s^{-1}(Y)$ выполнено

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\Big[\int_0^{T_a(Z)} \big(1 + |b(Z_s)| + \sigma^2(Z_s)\big)\,ds\Big] = \\ &\qquad = \mathsf{E}\Big[\int_{-\infty}^0 \frac{1 + |b(s^{-1}(y))| + \sigma^2(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\,L^y_{T_0(B)}(B)\,dy\Big] \leqslant \\ &\qquad \leqslant 2\int_{-\infty}^0 \frac{1 + |b(s^{-1}(y))| + \sigma^2(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\,|y|\,dy = \\ &\qquad = 2\int_0^a \frac{1 + |b(x)| + \sigma^2(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,|s(x)|\,dx. \end{aligned} \tag{3.43}$$

С учетом леммы 3.9, это выражение конечно. Следовательно, $T_0(Y) < \infty$ п.н. и

$$\inf_{t \in [0, T_0(Y)]} Y_t > -\infty \quad \text{п.н.} \tag{3.44}$$

Положим

$$N_t = Z_t - Z_0 - \int_0^{t \wedge T_a(Z)} b(Z_s)\,ds.$$

Для $T^n = T_{1/n,a}(Z)$ процесс N^{T^n} является локальным мартингалом с квадратической ковариацией

$$\int_0^{t \wedge T_{1/n,a}(Z)} \sigma^2(Z_s)\,ds.$$

Из (3.44) вытекает, что
$$\mathsf{P}\bigl\{T_a(Z)=T_{1/n,a}(Z)\bigr\}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$
Следовательно, N — локальный мартингал с
$$\langle N\rangle_t=\int_0^{t\wedge T_a(Z)}\sigma^2(Z_s)\,ds.$$
Рассуждая так же, как и раньше, заключаем, что сужение меры $\mathrm{Law}(Z_t;\,t\geqslant 0)$ на σ-алгебру $\mathcal{F}_{T_a}$ является решением (1) до T_a.

Докажем теперь существование решения, выходящего из нуля. Пусть P_x — решение до T_a, построенное выше, и $\widetilde{\mathsf{P}}_x=\mathsf{P}_x\circ\Phi_{T_a}^{-1}$ ($x\in(0,a]$). Процесс $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in(0,a]}$ является регулярным (это доказывается аналогично теореме 3.1 (ii)). Из (i) вытекает, что для этого процесса $e_4=0$. Выберем $x\in(0,a)$ и обозначим через A^x, Y^x процессы, определенные в (3.41), (3.42). Обозначим броуновское движение B, фигурирующее в (3.41) и (3.42), через B^x (оно выходит из точки $s(x)$). Для любых $0<x<c<a$ справедлива оценка
$$\begin{aligned}\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_x}[T_c]&=\mathsf{E}[T_{s(c)}(Y^x)]=\mathsf{E}\bigl[A^x_{T_{s(c)}(B^x)}\bigr]=\\&=\mathsf{E}\Bigl[\int_0^{T_{s(c)}(B^x)}\varkappa^{-2}(B_s^x)\,ds\Bigr]=\mathsf{E}\Bigl[\int_{-\infty}^{s(c)}\varkappa^{-2}(y)\,L^y_{T_{s(c)}(B^x)}(B^x)\,dy\Bigr]\leqslant\\&\leqslant\int_{-\infty}^{s(c)}\frac{2|y|}{\varkappa^2(y)}\,dy=\int_0^c\frac{2|s(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx.\end{aligned}$$
Последнее выражение стремится к нулю при $c\downarrow 0$, откуда вытекает, что $e_2=1$.

В силу предложения 1.40, существует мера $\widetilde{\mathsf{P}}_0$ такая, что $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[0,a]}$ — непрерывный строго марковский процесс с $e_1=e_2=1$, $e_3=e_4=0$. Пусть
$$T^+=\inf\{t\geqslant 0:X_t>0\},\qquad Z=I(T^+=0).$$
Согласно строго марковскому свойству,
$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_0}\bigl[Z\circ\Theta_{T^+}|\mathcal{F}^+_{T^+}\bigr]=\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_0}[Z]\quad\widetilde{\mathsf{P}}_0\text{-п.н.}$$

(Заметим, что $T^+ \leqslant T_a < \infty$ $\widetilde{\mathsf{P}}_0$-п.н.). С учетом равенства $Z \circ \Theta_{T^+} = 1$ п.н., получаем

$$\widetilde{\mathsf{P}}_0\{T^+ = 0\} = 1. \tag{3.45}$$

Пусть

$$g(x) = \big(1 + |b(x)| + \sigma^2(x)\big)\, I(0 < x < a).$$

Используя (3.45) и строго марковское свойство, мы можем написать

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_0}\Big[\int_0^{T_a} g(X_s)\,ds\Big] = \lim_{x\downarrow 0} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_0}\Big[\int_{T_x}^{T_a} g(X_s)\,ds\Big] =$$

$$= \lim_{x\downarrow 0} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_x}\Big[\int_0^{T_a} g(X_s)\,ds\Big] = \lim_{x\downarrow 0} \mathsf{E}\Big[\int_0^{T_0(Y^x)} g(s^{-1}(Y_s^x))\,ds\Big] =$$

$$= \lim_{x\downarrow 0} \mathsf{E}\Big[\int_0^{T_0(B^x)} \frac{g(s^{-1}(B_s^x))}{\varkappa^2(B_s^x)}\,ds\Big] = \lim_{x\downarrow 0} \mathsf{E}\Big[\int_{-\infty}^0 \frac{g(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\, L^y_{T_0(B^x)}(B^x)\,dy\Big] \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^0 \frac{g(s^{-1}(y))}{\varkappa^2(y)}\,|y|\,dy = 2\int_0^a \frac{1 + |b(x)| + \sigma^2(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,|s(x)|\,dx < \infty. \tag{3.46}$$

Согласно строго марковскому свойству, $\widetilde{\mathsf{P}}_0 \circ \Theta_{T_x}^{-1} = \widetilde{\mathsf{P}}_x$. Следовательно, процессы

$$M_t^x = \int_0^t I(s \geqslant T_x)\,dX_s - \int_0^{t\wedge T_a} I(s \geqslant T_x)\,b(X_s)\,ds, \quad x \in (0, a]$$

являются $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}}_0)$-локальными мартингалами. Положим

$$M_t = X_t - \int_0^{t\wedge T_a} b(X_s)\,ds.$$

Ввиду (3.45), (3.46),

$$\sup_{t\leqslant n} |M_t^x - M_t| \xrightarrow[x\downarrow 0]{\widetilde{\mathsf{P}}_0\text{-п.н.}} 0$$

для каждого $n > 0$. Следовательно, $M \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}}_0)$ (см. [8; гл. IX, (1.17)]). Аналогично доказывается, что процесс

$$M_t^2 - \int_0^{t\wedge T_a} \sigma^2(X_s)\,ds$$

является $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}}_0)$-локальным мартингалом. Сопоставляя это с (3.46), видим, что $\mathsf{P}_0 = \widetilde{\mathsf{P}}_0|\mathcal{F}_{T_a}$ — решение (1) с $x = 0$, определенное до T_a.

Единственность. Для $x > 0$ доказательство единственности проводится так же, как и в теореме 3.4 (iii).

Теперь предположим, что P_0 — неотрицательное решение с $x = 0$, определенное до T_a. Пусть $\widetilde{\mathsf{P}}_0 = \mathsf{P}_0 \circ \Phi_{T_a}^{-1}$. Аналогично (3.32), доказываем, что

$$\int_0^{T_a} I(X_s = 0)\, ds = 0 \quad \widetilde{\mathsf{P}}_0\text{-п.н.}$$

Следовательно, $T_x \xrightarrow[x\downarrow 0]{\widetilde{\mathsf{P}}_0} 0$, поскольку P_0 — неотрицательное решение. Отсюда

$$\mathsf{Q}_x = \widetilde{\mathsf{P}}_0 \circ \Theta_{T_x}^{-1} \xrightarrow[x\downarrow 0]{w} \widetilde{\mathsf{P}}_0. \tag{3.47}$$

Так же, как и в доказательстве теоремы 2.9, проверяем, что $\mathsf{Q}_x|\mathcal{F}_{T_a}$ — решение, выходящее из x и определенное до T_a. Поэтому $\mathsf{Q}_x|\mathcal{F}_{T_a} = \mathsf{P}_x$. С другой стороны, $X^{T_a} = X$ Q_x-п.н. и, согласно лемме 2.18,

$$\mathsf{Q}_x = (\mathsf{Q}_x|\mathcal{F}_{T_a}) \circ \Phi_{T_a}^{-1} = \mathsf{P}_x \circ \Phi_{T_a}^{-1}.$$

Учитывая (3.47), получаем, что мера $\widetilde{\mathsf{P}}_0$ (а значит, и P_0) единственна.

(iii) Заметим, что мера $\widetilde{\mathsf{P}}_0$, определенная в доказательстве существования, совпадает с $\mathsf{P}_0 \circ \Phi_{T_a}^{-1}\big(= (\widetilde{\mathsf{P}}_0|\mathcal{F}_{T_a}) \circ \Phi_{T_a}^{-1}\big)$. Теперь требуемый результат вытекает из предложения 1.40. □

Следующее утверждение (см. [21]) будет использоваться в доказательстве теоремы 3.7.

Предложение 3.10. *Предположим, что $J \subseteq \mathbb{R}$ — некоторый интервал и μ — мера (неотрицательная, но не обязательно конечная) на J. Пусть $(Z_t)_{t\in J}$ — случайный процесс с измеримыми траекториями, причем $\mathsf{E}|Z_t| < \infty$ для всех $t \in J$. Предположим, что существуют постоянные $d > 1$, $c > 0$, для которых*

$$\mathsf{E}|Z_t|^d \leqslant c\,(\mathsf{E}|Z_t|)^d, \quad t \in J.$$

Тогда

$$\int_J |Z_t|\,\mu(dt) < \infty \text{ п.н.} \iff \int_J \mathsf{E}|Z_t|\,\mu(dt) < \infty.$$

Доказательство теоремы 3.7. **(i)** Утверждение доказывается так же, как теорема 3.6 (i).

(ii) Пусть (P, T) — некоторое решение с $x < 0$. Предположим, что

$$\mathsf{P}\big\{\sup\nolimits_{t\in[0,T]} X_t > c\big\} > 0$$

для некоторого $c > 0$. Положим $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P}\circ\Phi_T^{-1}$. Выберем $\delta \in (0, c)$ и рассмотрим процесс

$$X'_t = \delta + \int_0^t I(s \geqslant T_\delta)\,dX_s.$$

Пусть $Y = s(X')$. Согласно предложениям 1.9 и 1.10, $Y \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$. При этом $Y_0 = s(\delta) = \Delta$ и

$$\langle Y\rangle_t = \int_0^t I(T_\delta \leqslant s \leqslant T)\,\varkappa^2(Y_s)\,ds.$$

Выберем такое t_0, что

$$\widetilde{\mathsf{P}}\big\{\sup\nolimits_{t\in[0,T\wedge t_0]} X_t > c\big\} = \theta > 0, \tag{3.48}$$

и положим

$$A_t = \begin{cases} \langle Y\rangle_t, & \text{если } t < T\wedge t_0,\\ \infty, & \text{если } t \geqslant T\wedge t_0,\end{cases}$$

$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : A_s > t\}, \qquad V_t = Y_{\tau_t}, \qquad \eta = A_{(T\wedge t_0)-}.$$

Процесс $V - \Delta$ является броуновским движением, выходящим из нуля и остановленным в момент η. Согласно (3.48),

$$\mathsf{P}\{\eta > T_\gamma(V)\} = \theta > 0,$$

где $\gamma = s(c)$. При этом θ не зависит от δ.

Пусть

$$g(y) = \frac{1 + |b(s^{-1}(y))|}{\varkappa^2(y)}\, I(y < \gamma),$$

где $\varkappa$ определено в (3.12). Из условий теоремы вытекает, что

$$\forall \lambda < \gamma, \ \int_{-\infty}^{\lambda} |y-\gamma|\, g(y)\, dy = \infty.$$

Пусть $(W_t)_{t \geqslant 0}$ — двумерное броуновское движение, выходящее из нуля. Рассмотрим множество

$$D = \Big\{ \omega : \forall \lambda < \gamma, \ \int_{-\infty}^{\lambda} |W_{\gamma-y}(\omega)|^2\, g(y)\, dy = \infty \Big\}.$$

Легко проверить, что множество D принадлежит "хвостовой" σ-алгебре $\mathcal{X} = \bigcap_{t>0} \sigma(W_s;\ s \geqslant t)$. Принимая во внимание *закон 0–1 Блюменталя* и свойство *инверсии времени* для W, получаем, что $\mathsf{P}(D)$ может равняться только 0 или 1. Из предложения 3.10 следует, что $\mathsf{P}(D) = 1$. Используя предложение 1.14 (i), получаем

$$\int_0^{T_\gamma(\Delta+B)} g(\Delta + B_s)\, ds \geqslant \int_\Delta^\gamma L^{y-\Delta}_{T_{\gamma-\Delta}(B)}(B)\, g(y)\, dy \overset{\text{law}}{=}$$

$$\overset{\text{law}}{=} \int_\Delta^\gamma |W_{\gamma-y}|^2\, g(y)\, dy \xrightarrow[\Delta \to -\infty]{\mathsf{P}} \int_{-\infty}^\gamma |W_{\gamma-y}|^2\, g(y)\, dy \overset{\text{п.н.}}{=} \infty,$$

где B — броуновское движение, выходящее из нуля. Теперь доказательство завершается так же, как и в теореме 3.3 (i).

(iii) *Существование.* Определим процесс Y равенством (3.42). Тогда

$$\mathsf{E}[T_0(Y)] = \mathsf{E}\Big[\int_0^{T_0(B)} \varkappa^{-2}(B_s)\, ds\Big] = \mathsf{E}\Big[\int_{-\infty}^0 \varkappa^{-2}(y)\, L^y_{T_0(B)}(B)\, dy\Big] \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^0 \varkappa^{-2}(y)\, |y|\, dy = \int_0^a \frac{2|s(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\, dx < \infty.$$

Следовательно, $T_0(Y) < \infty$ п.н. Отсюда

$$\inf_{t \in [0, T_0(Y)]} Y_t > -\infty \quad \text{п.н.}$$

Пусть $Z = s^{-1}(Y)$. Аналогично (3.43), проверяем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$\mathsf{E}\Big[\int_0^{T_{1/n,a}(Z)} \big(1+|b(Z_s)|+\sigma^2(Z_s)\big)\, ds\Big] \leqslant 2\int_{1/n}^a \frac{1+|b(x)|+\sigma^2(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\, |s(x)|\, dx < \infty.$$

Принимая во внимание, что процесс Z строго положителен, заключаем

$$\int_0^{T_a(Z)} \bigl(1 + |b(Z_s)| + \sigma^2(Z_s)\bigr)\,ds < \infty \quad \text{п.н.}$$

Дальнейшее доказательство проводится так же, как в теореме 3.6 (ii).

Единственность доказывается аналогично теореме 3.4 (iii).

(iv) Утверждение доказывается аналогично теореме 3.1 (ii). □

Доказательство теоремы 3.8. Теорема доказывается так же, как теорема 3.7. Единственное отличие заключается в значении e_2. Оно появляется при применении леммы 1.39. □

§ 3.3 Точки ветвления

Согласно односторонней классификации, приведенной в параграфе 3.1, любая изолированная особая точка имеет один из 8 возможных правых типов. Аналогичным образом определяются *левые типы* изолированных особых точек.

Определение 3.11. Будем говорить, что изолированная особая точка *имеет тип* $(i - j)$, если она имеет левый тип i и правый тип j.

Предположим, что нуль — изолированная особая точка. Тогда существуют константы $c < 0 < a$ такие, что

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2} \in L^1_{loc}\bigl([c, 0) \cup (0, a]\bigr). \tag{3.49}$$

Если нуль имеет правый тип 0, то, как легко видеть из формулировки теоремы 3.1,

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2}\, I\bigl((0, a]\bigr) \in L^1_{loc}(0).$$

Если же нуль имеет один из правых типов $1, \dots, 7$, то

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2}\, I\bigl((0, a]\bigr) \notin L^1_{loc}(0).$$

Итак, если нуль имеет и левый, и правый тип 0, то

$$\frac{1+|b|}{\sigma^2} \in L^1_{loc}(0),$$

и в таком случае точка нуль не является особой. Таким образом, правые и левые типы изолированной особой точки могут образовывать любые комбинации, за исключением $i=j=0$. Поэтому изолированная особая точка имеет один из 63 возможных правых типов.

Теорема 3.12. *Предположим, что нуль — изолированная особая точка для уравнения* (1).

(i) *Если нуль имеет тип* $(i-j)$ *с* $i,j = 0,1,4,5,6,7$ (*комбинация* $i=j=0$ *исключается*) *и* (P,T) — *решение* (1), *выходящее из нуля, то* $T=0$ P*-п.н.*

(ii) *Если нуль имеет тип* $(i-j)$ *с* $i=0,1,4,5,6,7$, $j=2,3$, *то существует единственное решение, определенное до* $T_{c,a}$, *и оно неотрицательно.*

(iii) *Если нуль имеет тип* $(i-j)$ *с* $i=2,3$, $j=0,1,4,5,6,7$, *то существует единственное решение, определенное до* $T_{c,a}$, *и оно неположительно.*

(iv) *Если нуль имеет тип* $(i-j)$ *с* $i=2,3$, $j=2,3$, *то существует как неотрицательное, так и неположительное решение, определенное до* $T_{c,a}$.

Доказательство. **(i)** Предположим сначала, что i и j принимают одно из значений 1, 4, 5, 6, 7. Тогда из теорем 3.1–3.8 вытекает, что $\mathsf{P}\{\forall t \leqslant T,\, X_t = 0\} = 1$. С другой стороны, из условия $\sigma \neq 0$ следует, что

$$\int_0^T I(X_s=0)\,ds = 0 \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

(см. (3.32)). Отсюда заключаем, что $T=0$ P-п.н.

Остается доказать утверждение для случая, когда либо i, либо j равно 0. Предположим без ограничения общности, что $j=0$. Положим

$\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_T^{-1}$. Процесс X является $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$-семимартингалом с разложением

$$X_t = \int_0^{t\wedge T} b(X_s)\, ds + M_t,$$

где $M \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$ и

$$\langle M\rangle_t = \int_0^{t\wedge T} \sigma^2(X_s)\, ds.$$

Будем сразу считать, что $T \leqslant T_a$ (иначе можно рассмотреть $T\wedge T_a$ вместо T). Пусть ρ и s — функции, определенные в (3.2) и (3.3). Согласно формуле Ито-Танака,

$$\begin{aligned} s(X_t^+) = \int_0^{t\wedge T} I(X_s \geqslant 0)\, \rho(X_s)\, b(X_s)\, ds + \int_0^t I(X_s \geqslant 0)\, \rho(X_s)\, dM_s - \\ - \frac{1}{2}\int_0^a \frac{2b(x)}{\sigma^2(x)}\, \rho(x)\, L_t^x(X)\, dx + \frac{1}{2} s'_+(0)\, L_t^0(X) = \\ = \int_0^t I(X_s \geqslant 0)\, \rho(X_s)\, dM_s + \frac{1}{2} s'_+(0)\, L_t^0(X) = \\ = \int_0^t I(X_s \geqslant 0)\, \rho(X_s)\, dM_s \end{aligned}$$

(в последнем равенстве мы воспользовались теоремой 2.8). Итак, процесс $s(X^+)$ является неотрицательным локальным мартингалом, выходящим из нуля. Следовательно, он равен нулю $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н., и для любого $t \geqslant 0$

$$\langle s(X^+)\rangle_t = \int_0^{t\wedge T} I(X_s \geqslant 0)\, \rho^2(X_s)\, \sigma^2(X_s)\, ds = 0 \quad \widetilde{\mathsf{P}}\text{-п.н.}$$

Отсюда получаем, что $\widetilde{\mathsf{P}}\{\forall t \geqslant 0,\, X_t \leqslant 0\} = 1$. Теперь требуемое равенство вытекает из теорем 3.1–3.8.

Утверждения **(ii)**–**(iv)** являются непосредственными следствиями теорем 3.1–3.8. □

Определение 3.13. Назовем изолированную особую точку d *точкой ветвления*, если она имеет тип $(i{-}j)$ с $i = 2, 3$, $j = 2, 3$.

Теорема 3.12 показывает, что точки ветвления — это те и только те изолированные особые точки, которые нарушают единственность решения. При наличии таких точек коэффициенты b и σ не определяют решение однозначно, т.е. стохастическое дифференциальное уравнение неприменимо для описания диффузии.

Предположим, что нуль имеет тип $(3-3)$. Согласно теореме 3.6, существует единственное неотрицательное решение P_0^+, выходящее из нуля и определенное до T_a. Заметим, что $T_a = T_{c,a}$ P_0^+-п.н. Следовательно, P_0^+ является решением также до $T_{c,a}$. Аналогично, существует неположительное решение P_0^-, выходящее из нуля и определенное до $T_{c,a}$ (при этом $T_{c,a} = T_c$ P_0^--п.н.).

Теорема 3.14. *Пусть нуль имеет тип* $(3-3)$ *и* P *— решение, выходящее из нуля и определенное до* $T_{c,a}$. *Тогда существует* $\lambda \in [0,1]$ *такое, что* $\mathsf{P} = \lambda \mathsf{P}_0^+ + (1-\lambda)\mathsf{P}_0^-$.

Доказательство. Выберем $0 < v < u < a$ и положим

$$T_v^u = \inf\{t \geqslant T_u : X_t = v\},$$
$$X'_t = u + \int_0^t I(s > T_u)\, dX_s,$$
$$Y_t = s\big(X'_{t\wedge T_v^u \wedge T_a}\big),$$

где s обозначает функцию, определенную в (3.3). Процесс Y является $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})$-локальным мартингалом ($\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Phi_{T_{c,a}}^{-1}$). Поскольку Y ограничен, он является равномерно интегрируемым мартингалом. Следовательно, $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.н. существует предел $Y_\infty = \lim_{t\to\infty} Y_t$. При этом

$$s(u) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(Y_0) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} Y_\infty =$$
$$= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\big[Y_\infty I(T_v^u < T_a)\big] + \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\big[Y_\infty I(T_v^u \geqslant T_a)\big] \leqslant s(v)\, \widetilde{\mathsf{P}}\{T_v^u < T_a\}$$

(в последнем неравенстве мы учли, что $Y \leqslant 0$). Поскольку $s(v) \xrightarrow[v\downarrow 0]{} -\infty$, получаем

$$\forall u \in (0,a),\ \ \widetilde{\mathsf{P}}\{T_v^u < T_a\} \xrightarrow[v\downarrow 0]{} 0.$$

Следовательно,
$$\widetilde{\mathsf{P}}\big\{\exists t\in(T^+,T_a]: X_t\leqslant 0\big\}=0, \qquad (3.50)$$
где $T^+=\inf\{t\geqslant 0: X_t>0\}$. Аналогично проверяем, что
$$\widetilde{\mathsf{P}}\big\{\exists t\in(T^-,T_c]: X_t\geqslant 0\big\}=0, \qquad (3.51)$$
где $T^-=\inf\{t\geqslant 0: X_t<0\}$. В силу условия $\sigma\neq 0$, имеем
$$\int_0^{t\wedge T} I(X_s=0)\,=0 \quad \widetilde{\mathsf{P}}\text{-п.н.}$$
(см. (3.32)). Следовательно,
$$\widetilde{\mathsf{P}}\{T^+\wedge T^-=0\}=1. \qquad (3.52)$$

Рассмотрим множества
$$\begin{aligned} A^+ =&\big\{X: X_0=0,\ X>0 \text{ на } (0,T_a] \text{ и } T_a(X)<\infty\big\},\\ A^- =&\big\{X: X_0=0,\ X<0 \text{ на } (0,T_c] \text{ и } T_c(X)<\infty\big\} \end{aligned}$$
(заметим, что A^+, $A^-\in\mathcal{F}_{T_{c,a}}$). Из (3.50)–(3.52) вытекает, что $\widetilde{\mathsf{P}}\{A\sqcup A^-\}=1$. Предположим, что $\widetilde{\mathsf{P}}(A^+)>0$. Обозначим через Q^+ условную меру $\mathsf{P}(\,\cdot\,|A^+)$. Легко проверить, что Q^+ — неотрицательное решение (1) до T_a. По теореме 3.6, $\mathsf{Q}^+=\mathsf{P}_0^+$. Аналогично, если $\mathsf{P}(A^-)>0$, то $\mathsf{P}(\,\cdot\,|A^-)=\mathsf{P}_0^-$. В результате получаем: $\mathsf{P}=\lambda\mathsf{P}_0^+ +(1-\lambda)\mathsf{P}_0^-$, где $\lambda=\mathsf{P}(A^+)$. □

Замечание. Если нуль имеет тип $(3-3)$, то, как показывает теорема 3.14, все решения, выходящие из нуля, допускают простое описание. Это связано с тем, что, покинув нуль, решение не может вновь вернуться в эту точку. Для точек типа $(2-2)$, $(2-3)$ и $(3-2)$ простого описания множества всех решений не существует. □

§ 3.4 Степенные уравнения

Рассмотрим уравнение
$$dX_t=\mu\,|X_t|^\alpha I(X_t\neq 0)\,dt+\big(\nu\,|X_t|^\beta I(X_t\neq 0)+\eta\, I(X_t=0)\big)\,dB_t. \qquad (3.53)$$

Предполагается, что $\nu \neq 0$, $\eta \neq 0$. Очевидно, свойства уравнения (3.53) одинаковы при всех $\eta \neq 0$ (слагаемое $\eta\, I(X_t = 0)$ добавляется для того, чтобы гарантировать выполнение условия $\sigma \neq 0$ в каждой точке).

Теорема 3.15. *Положим* $\lambda = \mu/\nu^2$, $\gamma = \alpha - 2\beta$. *Тогда правые типы нуля для уравнения* (3.53) *определяются по рисунку 2.*

Доказательство. При $\mu = 0$ уравнение (3.53) исследуется тривиальным образом. Предположим, что $\mu \neq 0$. Функция $\int_x^a \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}\,dy$, входящая в равенство (3.2), является одной из версий неопределенного интеграла

$$-\int^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}\,dy = \begin{cases} -\dfrac{2\lambda}{\gamma+1}\,x^{\gamma+1}, & \text{если } \gamma \neq -1, \\ -2\lambda \ln x, & \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

Итак, функция ρ с точностью до умножения на константу совпадает с функцией

$$\widetilde{\rho}(x) = \begin{cases} \exp\Bigl\{-\dfrac{2\lambda}{\gamma+1}\,x^{\gamma+1}\Bigr\}, & \text{если } \gamma \neq -1, \\ x^{-2\lambda}, & \text{если } \gamma = 1. \end{cases} \tag{3.54}$$

Поэтому с точностью до умножения на константу функция s совпадает с функцией

$$\widetilde{s}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \exp\Bigl\{-\frac{2\lambda}{\gamma+1}\,y^{\gamma+1}\Bigr\}\,dy, & \text{если } \gamma < -1,\ \lambda < 0, \\ \displaystyle\int_x^a \exp\Bigl\{-\frac{2\lambda}{\gamma+1}\,y^{\gamma+1}\Bigr\}\,dy, & \text{если } \gamma < -1,\ \lambda > 0, \\ x^{-2\lambda+1}, & \text{если } \gamma = -1,\ \lambda < 1/2, \\ \ln x - \ln a, & \text{если } \gamma = -1,\ \lambda = 1/2, \\ -x^{-2\lambda+1} + a^{-2\lambda+1}, & \text{если } \gamma = -1,\ \lambda > 1/2, \\ \displaystyle\int_0^x \exp\Bigl\{-\frac{2\lambda}{\gamma+1}\,y^{\gamma+1}\Bigr\}\,dy, & \text{если } \gamma > -1. \end{cases} \tag{3.55}$$

Свойства интегрируемости, фигурирующие в формулировках теорем 3.1–3.8, не изменятся, если вместо ρ и s поставить $\widetilde{\rho}$ и $\widetilde{s}$.

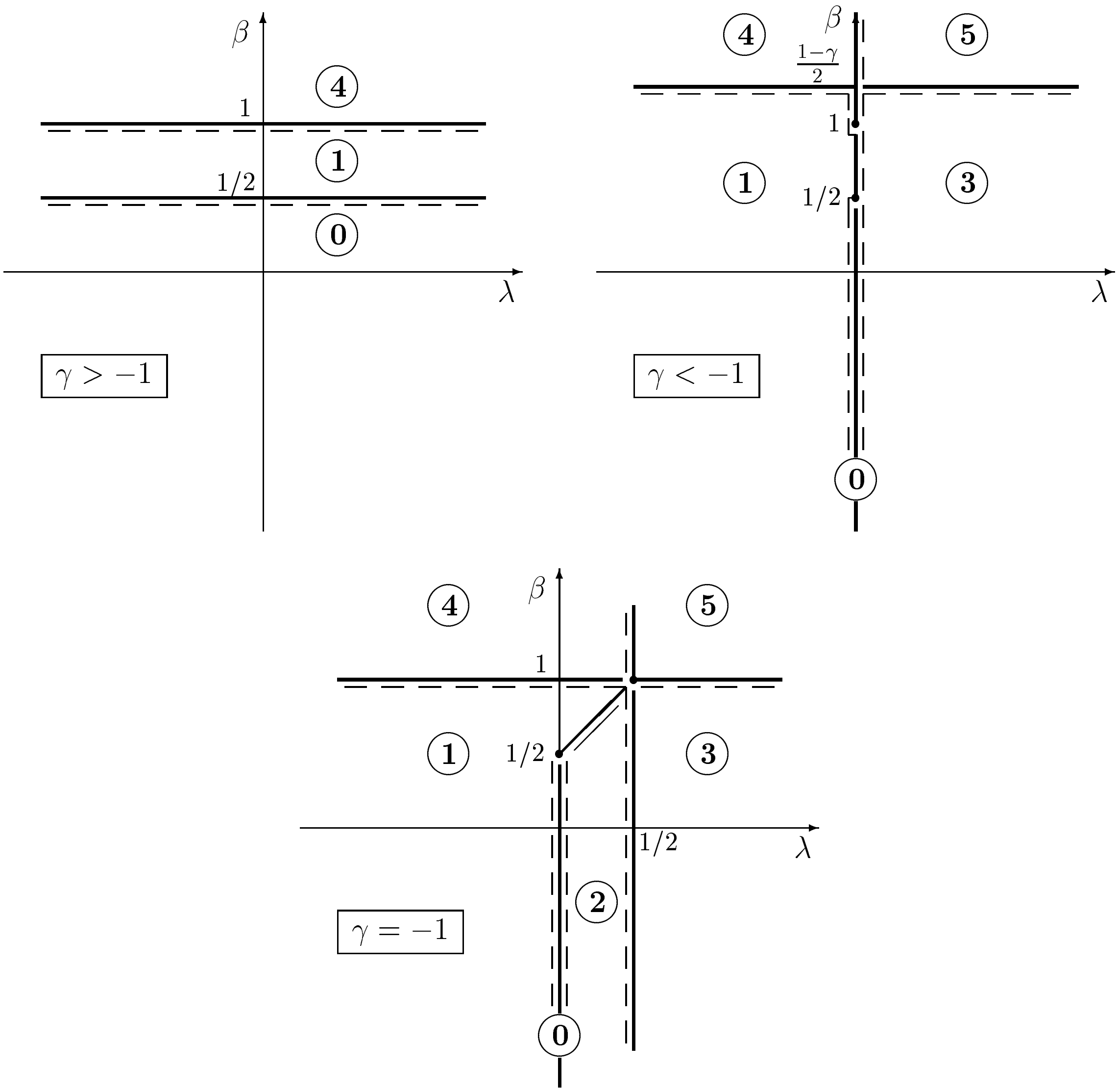


Рис. 2. Классификация для степенных уравнений.

Если пара (λ, β) принадлежит области, где стоит символ (i), то это означает, что для уравнения (3.53) нуль имеет правый тип i. Например, при $\gamma < -1$, $\lambda > 0$, $\beta \geqslant (1-\gamma)/2$ нуль имеет правый тип 5.

Предположим, что $\gamma > -1$. В этом случае функция $\widetilde{\rho}$ отделена от нуля и ограничена на $(0, a]$. Следовательно,

$$\int_0^a \widetilde{\rho}(x)\, dx < \infty.$$

Легко проверить, что при $\beta < 1/2$ нуль имеет правый тип 0; при $1/2 \leqslant \beta < 1$ нуль имеет правый тип 1; при $\beta \geqslant 1$ нуль имеет правый тип 4. Аналогично разбираются случаи $\gamma = -1$ и $\gamma < -1$. Единственным нетривиальным моментом является исследование сходимости интегралов

$$\int_0^a \frac{|\widetilde{s}(x)|}{\widetilde{\rho}(x)}\, dx$$

при $\gamma < -1$, $\mu \neq 0$. Для этого используется приводимая ниже лемма. □

Лемма 3.16. *Предположим, что* $\gamma < -1$ *и* $\mu \neq 0$*. Тогда существуют константы* $0 < c_1 < c_2$ *и* $\delta > 0$ *такие, что*

$$\forall x \in (0, \delta), \quad c_1\, x^\gamma \leqslant \frac{|s(x)|}{\rho(x)} \leqslant c_2\, x^\gamma.$$

Здесь через ρ *и* s *мы обозначаем функции, определенные в* (3.54) *и* (3.55).

Доказательство. Предположим сначала, что $\mu < 0$. В этом случае

$$\int_0^a \rho(x)\, dx < \infty$$

и $s(x) \geqslant 0$ на $(0, a]$. Из равенства

$$\rho'(x) = -2\lambda x^\gamma \rho(x) = 2|\lambda| x^\gamma \rho(x), \quad x \in (0, a)$$

вытекает

$$\rho(x) = 2|\lambda| \int_0^x y^\gamma \rho(y)\, dy > 2|\lambda| x^\gamma \int_0^x \rho(y)\, dy = 2|\lambda| x^\gamma s(x),$$

откуда получаем верхнюю оценку для $|s|/\rho$.

Существует $\delta > 0$ такое, что $\rho(y/2) < 2^\gamma \rho(y)$ при $y \in (0, \delta)$. Следовательно, при $x \in (0, \delta)$ имеем

$$\int_0^{x/2} y^\gamma \rho(y)\, dy = 2^{-\gamma-1} \int_0^x y^\gamma \rho(y/2)\, dy < \frac{1}{2} \int_0^x y^\gamma \rho(y)\, dy.$$

Отсюда

$$\rho(x) = 2|\lambda| \int_0^x y^\gamma \rho(y)\, dy < 4|\lambda| \int_{x/2}^x y^\gamma \rho(y)\, dy < 2^{2-\gamma}|\lambda| x^\gamma \int_{x/2}^x \rho(y)\, dy <$$
$$< 2^{2-\gamma}|\lambda| x^\gamma \int_0^x \rho(y)\, dy = 2^{2-\gamma}|\lambda| x^\gamma s(x), \quad x \in (0,\delta).$$

Пусть теперь $\mu > 0$. В этом случае

$$\int_0^a \rho(x)\, dx = \infty$$

и $s(x) \leqslant 0$ на $(0,a]$. Существует такое $\delta \in (0, a/4)$, что $\rho(2y) < \rho(y)/4$ при $y \in (0,\delta)$. Следовательно, при $x \in (0,\delta)$ имеем

$$\int_{2x}^{a/2} \rho(y)\, dy < \int_{2x}^{a} \rho(y)\, dy = 2\int_x^{a/2} \rho(2y)\, dy < \frac{1}{2}\int_x^{a/2} \rho(y)\, dy.$$

Отсюда

$$\int_x^{2x} \rho(y)\, dy > \frac{1}{2}\int_x^{a/2} \rho(y)\, dy, \quad x \in (0,\delta).$$

В результате,

$$\rho(x) = 2\lambda \int_x^{2x} y^\gamma \rho(y)\, dy + \rho(2x) >$$
$$> 2\lambda \int_x^{2x} y^\gamma \rho(y)\, dy > 2^{1+\gamma}\lambda\, x^\gamma \int_x^{2x} \rho(y)\, dy >$$
$$> 2^\gamma \lambda\, x^\gamma \int_x^{a/2} \rho(y)\, dy = 2^\gamma \lambda\, x^\gamma \big(s(a/2) - s(x)\big) =$$
$$= 2^\gamma \lambda\, x^\gamma s(a/2) + 2^\gamma \lambda\, x^\gamma |s(x)|, \quad x \in (0,\delta).$$

Учитывая, что $x^\gamma/\rho(x) \underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$, получаем верхнюю оценку для $|s|/\rho$. $\square$

§ 3.5 Снос постоянного знака

На протяжении всего параграфа предполагаем выполненным условие (3.1).

Теорема 3.17. *Предположим, что* $\sigma^2 = 1$ *и* $b \geqslant 0$ *на* $(0,a]$. *Тогда правым типом нуля может быть только 0, 2 или 3.*

Доказательство. Условие $b \geqslant 0$ означает, что ρ убывает на $(0, a]$. Предположим, что
$$\int_0^a \rho(x)\,dx < \infty. \tag{3.56}$$
Поскольку ρ убывает на $(0, a]$, имеем
$$\int_0^a \frac{1}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = \int_0^a \frac{1}{\rho(x)}\,dx < \infty$$
и
$$\int_0^a \frac{|b(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = -\int_0^a \frac{\rho'(x)}{\rho^2(x)}\,dx = \int_{\rho(a)}^{\rho(0)} \frac{1}{y^2}\,dy < \infty.$$
Итак, при выполнении условия (3.56) нуль может иметь правый тип 0 или 2.

Предположим теперь, что условие (3.56) нарушается. Тогда
$$|s(x)| = \int_x^a \rho(y)\,dy \leqslant a\rho(x). \tag{3.57}$$
Следовательно,
$$\int_0^a \frac{|s(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = \int_0^a \frac{|s(x)|}{\rho(x)}\,dx < \infty.$$
Из (3.57) и (3.11) вытекает, что
$$\int_0^a \frac{b(x)\,|s(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx < \infty.$$
Итак, в этом случае нуль имеет правый тип 3. $\square$

Теорема 3.18. *Предположим, что* $\sigma^2 = 1$ *и* $b \leqslant 0$ *на* $(0, a]$. *Тогда правым типом нуля может быть только 0 или 1.*

Доказательство. Поскольку $b \leqslant 0$, то ρ возрастает на $(0, a]$. Следовательно, условие (3.56) выполнено.

Предположим, что $\rho(0+) > 0$. Тогда, согласно (3.2),
$$\int_0^a \frac{|b(x)|}{\sigma^2(x)}\,dx < \infty.$$
Кроме того,
$$\int_0^a \frac{1}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = \int_0^a \frac{1}{\rho(x)}\,dx < \infty.$$

Следовательно, нуль имеет правый тип 0.

Предположим теперь, что $\rho(0+) = 0$. Тогда

$$\int_0^a \frac{2|b(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = -\int_0^a \frac{2b(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = \int_0^a \frac{\rho'(x)}{\rho^2(x)}\,dx = \int_0^{\rho(a)} \frac{1}{y^2}\,dy = \infty. \tag{3.58}$$

Кроме того,

$$s(x) = \int_0^x \rho(y)\,dy \leqslant x\,\rho(x). \tag{3.59}$$

Следовательно,

$$\int_0^a \frac{s(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = \int_0^a \frac{s(x)}{\rho(x)}\,dx < \infty.$$

Согласно (3.59) и (3.11),

$$\int_0^a \frac{|b(x)|\,s(x)}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx < \infty. \tag{3.60}$$

Итак, в этом случае нуль имеет правый тип 1. □

Теорема 3.19. *Предположим, что* $b \geqslant 0$ *на* $(0, a]$. *Тогда правым типом нуля может быть только 0, 1, 2, 3, 4 или 5.*

Доказательство. Поскольку $b \geqslant 0$, то ρ убывает на $(0, a]$. Если выполнено условие (3.56), то $s(x) \xrightarrow[x\downarrow 0]{} 0$, и поэтому $s(x)/\rho(x) \xrightarrow[x\downarrow 0]{} 0$. Если условие (3.56) нарушается, то

$$|s(x)| = \int_a^x \rho(y)\,dy \leqslant a\,\rho(x).$$

Итак, в любом случае,

$$\int_0^a \frac{b(x)\,|s(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx < \infty$$

(здесь мы воспользовались равенством (3.11)). Это означает, что нуль не может иметь ни правый тип 6, ни правый тип 7. □

Теорема 3.20. *Предположим, что* $b \leqslant 0$ *на* $(0, a]$. *Тогда правым типом нуля может быть только 0, 1 или 4.*

Доказательство. Из условия $b \leqslant 0$ вытекает выполнение (3.56). Следовательно, нуль имеет один из правых типов 0, 1, 2, 4, 6. Неравенства (3.59) и (3.60) сохраняют силу, и поэтому нуль не может иметь правый тип 6.

Предположим, что нуль имеет правый тип 2. Тогда $\rho(0+) = 0$ и (3.58) показывает, что

$$\int_0^a \frac{|b(x)|}{\rho(x)\,\sigma^2(x)}\,dx = \infty.$$

Но это противоречит предположению, что нуль имеет правый тип 2. □

	$\sigma^2 = 1$	σ произвольна
$b \geqslant 0$	**0 2 3**	**0 1 2 3 4 5**
$b \leqslant 0$	**0 1**	**0 1 4**

Рис. 3. Возможные правые типы при сносе одного знака

Замечание. Утверждения теорем 3.17–3.20 нельзя улучшить. Как показывает теорема 3.15, все правые типы, которые допускаются теоремами 3.17–3.20, действительно реализуются. □

§ 3.6 Осциллирующие типы

Результаты предыдущего параграфа показывают, что типы 6 и 7 могут реализовываться только тогда, когда коэффициент сноса является знакопеременным. В этом случае интеграл

$$\int_0^t b(X_s)\,ds$$

осциллирует, и поэтому мы называем типы 6 и 7 *осциллирующими* типами. Следующие примеры показывают, что эти типы реализуются.

Пример 3.21. *Пусть ρ — абсолютно непрерывная функция на $(0,a]$ такая, что*

$$1 \leqslant \rho(x) \leqslant 2, \quad x \in (0,a],$$
$$\int_0^a \frac{|\rho'(x)|}{\rho^2(x)}\, x\, dx = \infty.$$

Положим

$$\sigma(x) = 1, \qquad b(x) = -\frac{\rho'(x)}{2\rho(x)}.$$

Тогда нуль имеет правый тип 6.

Утверждение проверяется непосредственно.

Пример 3.22. *Пусть ρ — абсолютно непрерывная функция на $(0,a]$ такая, что*

$$\frac{1}{x} \leqslant \rho(x) \leqslant \frac{2}{x}, \quad x \in (0,a],$$
$$\int_0^a \frac{|\rho'(x)|}{\rho^2(x)}\, |\ln x|\, dx = \infty.$$

Положим

$$\sigma(x) = 1, \qquad b(x) = -\frac{\rho'(x)}{2\rho(x)}.$$

Тогда нуль имеет правый тип 7.

Утверждение проверяется непосредственно.

Пусть нуль имеет правый тип 6. Согласно теореме 3.4, для любого $x \in (0,a)$ существует мера $\overline{\mathsf{P}}_x$ на $\mathcal{F}$ такая, что $\overline{\mathsf{P}}_x|\mathcal{F}_{\overline{T}_{0,a}-}$ является решением уравнения (1) до $\overline{T}_{0,a}-$. Канонический процесс X *убивается* $\overline{\mathsf{P}}_x$-п.н. при достижении точки 0 или a. С другой стороны, существует мера $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ на $\mathcal{F}$ такая, что $\widetilde{\mathsf{P}}_x|\mathcal{F}_{\overline{T}_{0,a}-} = \overline{\mathsf{P}}_x|\mathcal{F}_{\overline{T}_{0,a}-}$ и X *останавливается* $\widetilde{\mathsf{P}}_x$-п.н. при достижении точки 0 или a. Тогда $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[0,a]}$ является регулярным процессом со шкалой и мерой скорости, определяемыми равенствами (3.3) и (3.4). Для этого процесса

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 1, \quad e_4 = 1.$$

Мера $\widetilde{\mathsf{P}}_x|\mathcal{F}_{T_{0,a}}$ *не* является решением до $T_{0,a}$, поскольку для нее нарушается свойство ii) определения 2.21 и интеграл

$$\int_0^{T_{0,a}} b(X_s)\,ds \tag{3.61}$$

не может быть определен как интеграл Лебега-Стилтьеса. С другой стороны, $\widetilde{\mathsf{P}}_x$-п.н. существует предел $\lim_{t\uparrow T_{0,a}} X_t$. Было бы интересно исследовать, существует ли

$$\lim_{t\uparrow T_{0,a}} \int_0^t b(X_s)\,ds. \tag{3.62}$$

(Например, при $\sigma = 1$ этот предел очевидно существует). Если предел (3.62) существует $\widetilde{\mathsf{P}}_x$-п.н. (или по $\widetilde{\mathsf{P}}_x$-вероятности), то его можно назвать *главным значением* интеграла (3.61). В этом случае можно было бы обобщить определение 2.21 и назвать меру $\widetilde{\mathsf{P}}_x|\mathcal{F}_{T_{0,a}}$ решением уравнения (1), определенным до момента $T_{0,a}$. Итак, если принять это обобщенное определение, то типы 6 и 1 сливаются в один.

Предположим теперь, что нуль имеет правый тип 7. Тогда для любого $x \in (0, a]$ существует (строго положительное) решение P_x, определенное до T_a, и не существует неотрицательного решения, выходящего из нуля. Положим $\widetilde{\mathsf{P}}_x = \mathsf{P}_x \circ \Phi_{T_a}^{-1}$. Те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 3.6, показывают, что существует мера $\widetilde{\mathsf{P}}_0$ такая, что

$$\widetilde{\mathsf{P}}_0\{\forall t > 0,\, X_t > 0\} = 1$$

и $(\widetilde{\mathsf{P}}_x)_{x\in[0,a]}$ является непрерывным строго марковским процессом с

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = 0.$$

Мера $\widetilde{\mathsf{P}}_0|\mathcal{F}_{T_a}$ *не* является решением уравнения (1) до момента T_a, поскольку

$$\forall \varepsilon > 0,\ \int_0^{\varepsilon} |b(X_s)|\,ds = \infty\ \ \widetilde{\mathsf{P}}_0\text{-п.н.}$$

Однако может существовать предел

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_t^{T_a} b(X_s)\,ds,$$

который можно рассматривать как главное значение интеграла

$$\int_0^{T_a} b(X_s)\,ds.$$

В случае существования этого предела мы могли бы обобщить определение 2.21 и назвать меру $\widetilde{\mathsf{P}}_0$ решением, выходящим из нуля. Если принять это обобщенное определение, то типы 7 и 3 сливаются в один.

Итак, при исследовании поведения решения для осциллирующих типов возникает проблема существования главного значения некоторого интегрального функционала от непрерывного строго марковского процесса. Отметим, что главные значения интегральных функционалов от броуновского движения исследованы достаточно подробно (см. [39], [47]).

Список литературы

[1] *И.В. Гирсанов.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры. — Теория вероятностей и ее применения, **5** (1960), вып. 3, с. 314–330.

[2] *И.В. Гирсанов.* Пример неединственности решения стохастического уравнения К. Ито. — Теория вероятностей и ее применения, **7** (1962), вып. 3, с. 336–342.

[3] *И.И. Гихман.* О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями. — Украинский математический журнал, **2** (1950), №3, с. 45–69.

[4] *И.И. Гихман.* К теории дифференциальных уравнений случайных процессов, I, II. — Украинский математический журнал, **2** (1951), №4, с. 37–63; **3** (1951) №3, с. 317–339.

[5] *И.И. Гихман, А.В. Скороход.* Теория случайных процессов, т. III. М.: Наука, 1975.

[6] *И.И. Гихман, А.В. Скороход.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1982.

[7] *Е.Б. Дынкин.* Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.

[8] *Ж. Жакод, А.Н. Ширяев.* Предельные теоремы для случайных процессов. М.: Физматлит, 1994.

[9] *А.К. Звонкин, Н.В. Крылов.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений. — В кн.: Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974), Вильнюс, 1975, ч. 2, с. 9–88.

[10] *К. Ито, Г. Маккин.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968.

[11] *А.Н. Колмогоров.* Об аналитических методах в теории вероятностей. — Успехи математических наук, 1938, вып. 5, с. 5–41.

[12] *Н.В. Крылов.* О квазидиффузионных процессах. — Теория вероятностей и ее применения, **11** (1966), вып. 3, с. 424–443.

[13] *Н.В. Крылов.* О стохастических интегральных уравнениях Ито. — Теория вероятностей и ее применения, **14** (1969), вып. 2, с. 340–348.

[14] *Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

[15] *Н.И. Портенко.* Диффузионные процессы с неограниченным коэффициентом переноса. — Теория вероятностей и ее применения, **20** (1975), вып. 1, с. 29–39.

[16] *Н.И. Портенко.* К теории стохастических дифференциальных уравнений. — Теория случайных процессов, 1976, вып. 4, с. 72–80.

[17] *А.В. Скороход.* Исследования по теории случайных процессов. Киев, издательство Киевского университета, 1961.

[18] *S. Assing, W. Schmidt.* Continuous strong Markov processes in dimension one. — Lecture Notes in Mathematics, **1688** (1998).

[19] *A.N. Borodin, P. Salminen.* Handbook of Brownian Motion — Facts and Formulae. Basel: Birkhäuser, 1996.

[20] *E. Çinlar, J. Jacod, P. Protter, M.J. Sharpe.* Semimartingales and Markov processes. — Probability Theory and Related Fields, **54** (1980), p. 161–219.

[21] *M. Csörgö, L. Horwath, Q.-M. Shao.* Convergence of integrals of uniform empirical and quantile processes. — Stochastic Process. Appl. **45** (1993), No. 2, p. 278–294.

[22] *H. J. Engelbert, W. Schmidt.* On one-dimensional stochastic differential equations with generalized drift. — Lecture Notes in Control and Information Sciences, **69** (1985), p. 143–155.

[23] *H. J. Engelbert, W. Schmidt.* On solutions of one-dimensional stochastic differential equations without drift. — Probability Theory and Related Fields, **68** (1985), p. 287–314.

[24] *H. J. Engelbert, W. Schmidt.* Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations, I, II, III. — Math. Nachr. **143** (1989), p. 167–184; **144** (1989), p. 241–281; **151** (1991), p. 149–197.

[25] *W. Feller.* The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations. — Ann. Math. **55** (1952), p. 468–519.

[26] *W. Feller.* Diffusion processes in one dimension. — Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954), p. 1–31.

[27] *K. Itô.* On a stochastic integral equation. — Proc. Jap. Acad., **22** (1946), p. 32–35.

[28] *K. Itô.* On stochastic differential equations. — Memoirs of the American Mathematical Society, **4** (1951), p. 1–51.

[29] *O. Kallenberg.* Foundations of modern probability. Springer, 1997.

[30] *I. Karatzas, S.E. Shreve.* Brownian motion and stochastic calculus. Springer, 1988.

[31] *J.F. Le Gall.* Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. — Lecture Notes in Mathematics, **986** (1983), p. 15–31.

[32] *B. Øksendal.* Stochastic differential equations. Springer, 1992.

[33] *J.W. Pitman, M. Yor.* Some divergent integrals of Brownian motion. — Adv. Appl. Probab. **18** (1986), p. 109–116.

[34] *D. Revuz, M. Yor.* Continuous martingales and Brownian motion. Springer, 1994.

[35] *W. Schmidt.* On semimartingale diffusions and stochastic differential equations. — Stochastics and Stochastic Reports, **29** (1990), p. 407–424.

[36] *A.V. Skorokhod.* Studies in the theory of random processes. — Addison-Wesley, Reading, Mass. 1965.

[37] *D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan.* Diffusion processes with continuous coefficients, I, II. — Communications in Pure and Applied Mathematics, **22** (1969), p. 345–400; **22** (1969), p. 479–530.

[38] *D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan.* Multidimensional diffusion processes. Springer, 1979.

[39] *T. Yamada.* Principal values of Brownian local times and their related topics. — Itô's stochastic calculus and probability theory. Springer (1996), p. 413–422.

[40] *T. Yamada, S. Watanabe.* On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. — J. Math. Kyoto. Univ. **11** (1971), p. 155–167.

[41] *А.С. Черный.* Векторный стохастический интеграл в первой фундаментальной теореме финансовой математики. — Успехи математических наук, **53** (1998), вып. 4, с. 221–222.

[42] *А.С. Черный.* О сильных и слабых решениях стохастических дифференциальных уравнений, определяющих процессы Бесселя. — Тезисы докладов, отмеченных премиями на Колмогоровских чтениях 1999 г. Теория вероятностей и ее применения, **44** (1999), вып. 3, с. 699.

[43] *А.С. Черный.* Сходимость некоторых интегралов, связанных с процессами Бесселя. — Теория вероятностей и ее применения, **45** (2000), вып. 2, с. 251–267.

[44] *А.С. Черный.* Качественное поведение решений стохастических дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами. — Успехи математических наук, **55** (2000), вып. 3, с. 193–194.

[45] *A.S. Cherny.* Vector stochastic integrals in the fundamental theorem of asset pricing. — Proceedings of the conference on Mathematical Finance, Paris, INRIA, 1998, p. 149–163.

[46] *A.S. Cherny.* Convergence of some integrals associated with Bessel processes. — Proceedings of the conference Mathématiques Financières, Paris, INRIA, 1999, p. 405–425.

[47] *A.S. Cherny.* On the existence of the principal values for Brownian local times. — To be published in Séminaire de Probabilités, XXXV, Lecture Notes in Mathematics, 2000, 15 pp.

[48] *A.S. Cherny.* On the strong and weak solutions of stochastic differential equations governing Bessel processes. — To be published in Stochastics and Stochastic Reports, 7 pp.